

Epistemiese verwagtinge en werklikhede by aandeelprysopbrengste

Abie Bouwer en Eben Maré

Abie Bouwer, onafhanklike navorser, en
Eben Maré, medeprofessor, Wiskunde en Toegepaste Wiskunde, Universiteit van Pretoria

Opsomming

Hierdie artikel ondersoek aandeelprysopbrengste vanuit 'n epistemiese raamwerk. Twee kern-vrae word gestel: Eerstens, indien aandeelpryse suiwer op beskikbare inligting gebaseer is, hoe behoort die statistiese eienskappe van opbrengsverdelings te lyk? Tweedens, indien empiriese aandeelprysopbrengste hiervan afwyk, wat impliseer dit oor die onderliggende dinamika?

Die eerste deel van die studie ontwikkel 'n teoretiese model vir die verwagte gedrag van prosesse wat volledig deur inligting gedryf word. Marginale veranderinge in inligting oor baie kort tydsintervalle word gebruik om te formuleer hoe die prys van 'n bate beïnvloed word en om te wys hoe die aanvanklike waarskynlikheidsdigtheidsfunksie deur opeenvolgende konvolusies ontwikkel tot verdelings op arbitrêre tydskaal.

In die tweede deel word empiriese data van aandeelpryse oor verskillende tydsintervalle ontleed, met spesifieke fokus op die evolusie van kurtose as 'n maatstaf van verspreidingsgedrag. Hierdie waarnemings word gekontrasteer met die teoretiese verwagtinge soos in die eerste deel afgelei. Daar word bevind dat slegs gedeeltelike ooreenstemming bestaan en dat strukturele afwykings voorkom wat nie met 'n suiwer inligtingsgedrewe proses strook nie. Ten slotte word 'n moontlike verklaring vir die afwykende gedrag gebied en die implikasies vir die interpretasie van markinligting word bespreek.

Trefwoorde: aandeelprysopbrengs; GARCH; hiperboliese omskakeling; inligtingsproses; kurtose; nie-lineêre transformasie; trosvorming; waarskynlikheidsverdeling

Abstract

Epistemic expectations and realities in stock price returns

This article presents a dual investigation of stock price returns: one theoretical and one empirical. It explores how returns should behave if they are entirely driven by information and compares these theoretical expectations to actual market data. The central question is whether the statistical features of price returns can be reconciled with the notion that prices reflect only the arrival and processing of new information.

In the first, epistemic component of the study, a probability distribution is constructed to describe the impact of small units of information (“news particles”) on asset prices. The model assumes that stock prices evolve exclusively in response to these informational events, with each news particle contributing incrementally to the total information state. Since information is not directly measurable and has no inherent numerical value, its value is defined operationally as the degree to which it moves prices. The expected distribution of returns over different time intervals is then derived by convolving the distribution of individual news particles. These convolutions simulate how the accumulation of many small informational updates might affect return distributions over longer periods.

Particular attention is paid to kurtosis, which captures the relative weight of observations in the tails of a distribution, is sensitive to extreme events, and therefore provides a natural summary of the heavy-tailed behaviour and extreme price movements emphasised in the empirical finance and risk-management literature. The theoretical model predicts that, as time progresses and more informational updates are convolved, kurtosis should decay steadily and ultimately converge to the kurtosis of a normal distribution, in accordance with the central limit theorem. This behaviour is taken as a benchmark: if returns are purely information-driven, then kurtosis should follow a predictable decay path.

The empirical portion of the study analyses return data from the FTSE/JSE Top 40 Total Return Index (J200T) across a range of time intervals, from one second to one year. The returns are carefully prepared to exclude distortions due to weekend gaps and non-trading hours. For each time interval, key statistical moments are calculated, with a particular focus on kurtosis. The analysis shows that empirical kurtosis, while it declines as time intervals increase (as expected), remains significantly higher than the theoretical model predicts. Most notably, it does not appear to converge to the normal level of kurtosis (i.e. a value of 3). Even at longer intervals (e.g. daily or weekly), kurtosis remains elevated, suggesting that something other than pure information is affecting return distributions.

It is proposed that the persistent excess kurtosis observed in real return data is not the result of the information process itself, but rather of a transformation applied to information as it is reflected in prices. This transformation is argued not to be a random artefact, but to follow a consistent pattern: it is the result of a structural heuristic that emerges when market participants infer measurable values (such as returns) from unmeasurable causes (such as the significance of news). This process is referred to as hyperbolic transformation, a concept developed in earlier work. It arises from the geometric observation that when the domain of a function is not directly measurable, estimators tend to interpolate between known output values (on the range or value axis), rather than inputs (on the domain axis). Under certain assumptions, interpolation

on the value axis is proportionally equivalent to interpolation on the functional curve, resulting in a distortion of the underlying distribution, often captured by an increase in kurtosis.

To support this hypothesis, the rate of kurtosis decay in the theoretical model (where kurtosis evolves as a function of the number of convolutions) is compared to the empirical decay of kurtosis (as a function of the return interval, measured in seconds). A functional transformation is sought that aligns the two decay trajectories in their first and higher-order derivatives. A simple exponential function is found to provide an excellent match. Using numerical optimisation, parameter values are identified that minimise the difference between the theoretical and empirical kurtosis derivatives across intervals. The match is sufficiently strong to suggest that both distributions are in the same phase of decay but displaced in absolute magnitude. This displacement is attributed to hyperbolic transformation.

Furthermore, it is tested whether this excess kurtosis can be attributed to conditional heteroskedasticity (volatility clustering), a well-known feature of financial time series. Using GARCH(1,1) models and Ljung–Box tests on squared returns, it is shown that, although volatility clustering is indeed present, it cannot on its own account for the magnitude of the kurtosis observed – especially at very short intervals. It is concluded that volatility clustering contributes to excess kurtosis but is not the dominant cause.

To model returns incorporating the hypothesised transformation, a process of the form:

$$\ln \frac{S(t + \Delta t)}{S(t)} = \mu + \sigma(t) \cdot Z(X; \lambda, \kappa)$$

is used. Here, Z is a standardised version of $\sinh(\kappa X + \lambda)$, where X is standard normally distributed variable and λ and κ are shape parameters. The $\sinh$ function introduces hyperbolic curvature, and the Z -transformation ensures zero mean and unit variance. The volatility term $\sigma(t)$ follows a GARCH(1,1) process, calibrated to capture volatility dynamics. All model parameters are calibrated by maximising the log-likelihood of the observed return series. The residuals from the model (the inferred X -values) are tested for normality, autocorrelation and volatility clustering. The results are consistent with the model's assumptions: residuals approximate standard normality and exhibit no significant autocorrelation or ARCH effects, provided the data is pre-processed to remove multi-day returns and calendar artefacts.

The findings suggest that hyperbolic transformation is a viable explanation for the persistent excess kurtosis seen in return distributions, especially at intraday and daily frequencies. The model performs well in matching both the shape and dynamic structure of returns. However, the scope of the study is limited to an equity index under favourable conditions (high liquidity, active trading). Further research is needed to assess the generalisability of the findings to other assets, market regimes and levels of market efficiency. Overall, the study proposes a synthesis of information-based pricing theory and heuristic modelling, offering a coherent framework for explaining the shape and dynamics of stock return distributions and inviting further exploration of the geometric and epistemic underpinnings of market behaviour.

Keywords: central limit theorem; GARCH; hyperbolic transformation; information-driven process; kurtosis; nonlinear transformations; probability distribution; stock price return; volatility clustering

1. Inleiding

Die wêreld lewer voortdurend nuwe inligting wat tot begrip van die werklikheid bydra. Soos hierdie inligting beskikbaar raak, begin die toekoms geleidelik gestalte aanneem – voordat dit uiteindelik in die verlede verdwyn.

Nietemin is nuwe inligting nie universeel interpreteerbaar of waardeerbaar nie. Die betekenis en impak daarvan hang sterk van konteks af. Reënval, byvoorbeeld, kan voordelig wees vir 'n boer, maar nadelig vir die organiseerder van 'n buitelugkonsert. Dieselfde gebeurtenis kan dus uiteenlopende finansiële gevolge vir verskillende rolspelers hê.

Hierdie artikel ondersoek hoe nuwe inligting in aandeelpryse neerslag vind. In die gees van Williams (1938) word pryse beskou as die verdiskontering van markdeelnemers se verwagtinge oor toekomstige uitbetalings en gebeure. Indien pryse inligting doeltreffend reflekteer, behoort prysbewegings in beginsel die direkte gevolg van veranderings in beskikbare inligting te wees. Hierdie uitgangspunt rig die ondersoek na die verband tussen inligting- en prysgedrag.

Dit is welbekend dat aandeelopbrengste van die normaalverdeling afwyk. Oortollige kurtose word hier as 'n stylfeit aanvaar. Die verskynsel is reeds vroeg beskryf (Fama 1965; Mandelbrot 1963) en saamgevat in oorsigwerke (Campbell, Lo en MacKinlay 1997; Cont 2001; Lo en MacKinlay 1999).

Benaderings om die empiriese patrone te pas het oor dekades ontwikkel. Klassieke voorbeelde sluit in mengselverdelings (Press 1967), saketydmodellering (Clark 1973) en alternatiewe swaareindverdelings (Barndorff-Nielsen 1977; Eberlein en Keller 1995). Hierbenewens word ARCH/GARCH-modelle en hul uitbreidings gereeld toegepas (Bollerslev 1986, 1987; Engle 1982).

'n Paralelle stroom in die afgeleide-instrumenteliteratuur fokus minder op die onderliggende prysdinamiek en eerder op prysimplikasies: Stogastiese volatiliteit en sprongdiffusie word gemotiveer deur nie-konstante implisiete volatiliteit (Bates 1996; Duffie, Pan en Singleton 2000; Heston 1993; Merton 1976). Verdere dryfvere sluit in verbeterde risikometing en veral die voorspelling van ekstreme prysbewegings (Embrechts, Klüppelberg en Mikosch 1997; McNeil, Frey en Embrechts 2005). Die frekwensie van uiterstes en swaar verdelingsuiteindes motiveer juis waarom metings wat op die verdeling se vierde moment, naamlik kurtose, gebaseer is, as 'n geskikte fokuspunt vir ondersoek dien.

Epistemiese of kousale verklarings vir waarom die opbrengsverdeling die waargenome vorm aanneem, is skaarser. Clark (1973) se mengselverdelingshipotese koppel wisselende aktiwiteit aan volatiliteit en wys dat Brown-beweging in saketyd, wanneer dit na kloktyd omgeskakel word, tot 'n swaareindverdeling lei. Modelle wat die wisselwerking tussen waardebeleggers en korttermyn-trendjagters uitbeeld (Lux en Marchesi 1999), sowel as werkwyses wat die impak van groot transaksies beklemtoon (Gabaix, Gopikrishnan, Plerou en Stanley 2003), toon soortgelyke nie-normale kenmerke. Nietemin is dié verklarings hoofsaaklik verskynselbeskrywend; verg gereelde kalibrasie; en is nie altyd bruikbaar in die praktyk vir prysbepaling of risiko-bestuur nie.

In teenstelling met dié benaderings word hier 'n ander pad gevolg. Daar word getuienis gelewer dat die waargenome opbrengsverdeling oor uiteenlopende toestande grootliks 'n byproduk van 'n heuristiek is. Dié heuristiek word aangevuur deur die omset van onkwantifiseerbare nuus in kwantifiseerbare opbrengste. Hierdie benadering lei daartoe dat die vorm van die verdeling tussen verskillende marktoestande betreklik konstant bly. Dit verminder die noodsaak vir voortdurende kalibrasie, omdat die model se parameters reeds 'n wye reeks toestande insluit. Indien dit standhou, het dit betekenisvolle implikasies vir bateprysbepaling en risikobestuur, waar onsekerheid oor die omvang van onwaarskynlike, ekstreme gebeure tradisioneel 'n uitdaging bly.

Dit bring die kernkwessie na vore: Pryse reageer op inligting, maar die waarde van nuus is self nie direk kwantifiseerbaar nie. Soos reeds genoem, het nuwe inligting nie 'n vaste of objektiewe waarde wat maklik gekwantifiseer kan word nie. Dit bemoeilik pogings om 'n model te bou wat veranderinge in die staat van inligting – oftewel “nuusbrokkies” – sistematies vertaal na veranderinge in aandeelpryse. Hoewel markdeelnemers daagliks sulke vertalings blykbaar intuïtief uitvoer (Fama, Fischer, Jensen en Roll 1969), is dit vir die teoretikus minder eenvoudig om, byvoorbeeld, “goeie nuus” om te skakel na “hierdie aandeel is nou onderwaardeer”.

Om dié rede word die presiese meganisme van interpretasie nie gemodelleer nie en daar word bloot aanvaar dat so 'n meganisme funksioneer. Daar word verder veronderstel dat nuusbrokkies op 'n kontinuum gerangskik kan word – van katastrofiese slegte nuus wat 'n maatskappy se ondergang beteken, tot uitsonderlik goeie nuus wat sy waarde aansienlik verhoog. Vir die doeleindes van hierdie studie is dit voldoende dat hierdie brokkies volgens hul impakwaarde op 'n reële skaal georden kan word.

Ter wille van eenvoud word aanvaar dat nuusbrokkies sonder meetbare invloed op 'n aandeelprys 'n waarde van nul het, met positiewe waardes vir goeie nuus en negatiewe waardes vir slegte nuus.

Op grond van hierdie vereenvoudigde maar bruikbare raamwerk, word 'n waarskynlikheidsdigtheidsfunksie (WDF) vir die netto verandering in inligting oor baie kort tydsintervalle voorgestel. Hierdie funksie word nie empiries afgelei nie, maar is gebaseer op logiese redenering en aannames oor die aard van inligtingsvloei.

Met so 'n WDF tot beskikking kan teoretiese afleidings gemaak word oor die verwagte gedrag van aandeelprysopbrengste oor langer tydperke. Van besondere belang is die gedrag van kurtose – die mate van stert-digtheid – en hoe dit oor tyd ontwikkel in prosesse wat suiwer deur inligting gedryf word.

Die teoretiese raamwerk vorm die grondslag vir die empiriese gedeelte van die studie. In die empiriese gedeelte word die opbrengste van die FTSE/JSE Top 40 Total Return Index oor 'n verskeidenheid tydsintervalle, van een sekonde tot jaarliks, ontleed. Die fokus val veral op hoe kurtose oor hierdie skale ontwikkel.

Uit hierdie ontleding blyk dit dat buitengewone kurtose selfs oor lang tydsintervalle steeds teenwoordig is in die indeks se opbrengste. Dit stem nie ooreen met die verwagtinge op grond van die onderliggende inligtingsproses nie. In die teoretiese model begin die verdeling reeds ná 'n beperkte aantal konvolusies normaal lyk – baie vroeër as wat 'n jaar se akkumulering van inligting sou impliseer.

Hierdie afwyking lei tot die voorstel dat 'n heuristiese transformasie, naamlik hiperboliese omskakeling, onderliggend is aan die waargenome gedrag. Bouwer en Maré (2025) ontwikkel 'n gedagtemodel waarin markdeelnemers waardes beraam wanneer 'n kwantifiseerbare opbrengs uit 'n onderliggende, kwalitatiewe en onkwantifiseerbare konteks afgelei moet word. Omdat die definisiegebied (konteks) nie direk gemeet kan word nie, word plaaslike interpolasie op die waarde-as uitgevoer tussen twee ankeropbrengste wat met soortgelyke kontekste geassosieer word. Onder redelike aannames is so 'n interpolasie ekwivalent aan interpolasie op die funksionele kromme self, dit wil sê, op die grafiek van die funksie wat opbrengs aan konteks koppel. Hierdie meganisme lei tot 'n hiperboliese verbuiging in die konteks-opbrengs-verhouding, wat op sy beurt oortollige kurtose in die opbrengsverdeling genereer, in ooreenstemming met die empiriese patrone wat hier onder waargeneem word (vgl. Bouwer en Maré 2025; sien ook §2.4.2).

2. Metode van ondersoek en analise

Die studie beoog om getuienis te bied dat die verdeling van aandeelprysopbrengste 'n uitvloeisel van 'n stelselmatige heuristiek is. Onderliggende inligting word deur 'n nie-lineêre omskakeling na pryse oorgedra, wat oortollige kurtose laat ontstaan. Die vertrekpunt is normatief: *Hoe behoort opbrengste verdeel te wees indien dit uitsluitlik deur nuwe inligting gedryf word?* Hierdie epistemiese verwagting word vervolgens met werklike opbrengste vergelyk, met klem op die gedrag van kurtose. Gemiddeld en variansie volg onder sommering van onafhanklike inligtingsbydraes 'n generiese skaalreël (vgl. Durrett 2020; Feller 1971) en dra dus min inligting oor die spesifieke vorm van die onderliggende verdeling. Kurtose, as vierde sentrale moment, meet daarenteen die relatiewe gewig van waarnemings in die uiteindes van die verdeling en is besonder sensitief vir seldsame, ekstreme opbrengste. Omdat die epistemiese model in hierdie afdeling op 'n simmetriese verdeling berus, sou 'n ontleding van skeefheid verdere aannames oor asimmetrie vereis. Die verloop van kurtose oor tyd bied dus die mees geskikte toets vir die vraag of aandeelprysopbrengste werklik uitsluitlik deur nuwe inligting gedryf word.

Deur die epistemiese en empiriese gegewens langs mekaar te plaas, word 'n samehangende beeld gevorm wat die onderliggende dinamika verhelder. Die roete word hier onder bondig uiteengesit.

1. **Inligtingsverdeling.** 'n Simmetriese nuusdigtheid vir klein veranderings in die staat van totale inligting word gestel. Kurtose onder herhaalde konvolusies word analities afgelei. Die verband tussen kurtose en die aantal konvolusies word vasgelê (sien §2.1).
2. **Empiriese patroon.** Kurtose van werklike opbrengste word oor verskeie tydskale gemeet. Afplating van kurtose word waargeneem en die verband tussen tydskaal en kurtose word beraam (sien §2.2).
3. **Skakel tussen skale.** 'n Funksie $n(\tau)$ word bepaal wat die aantal konvolusies met die tydskaal versoen, sodat die tempo van afplating in teorie en data ooreenstem. Hoërderde-afgeleides belyn die trajekte verder (sien §2.3).
4. **Gevolgtrekking uit die belyning.** Met 'n Taylor-uitbreiding word afgelei dat opbrengste deur nuus gedryf word, met 'n vlakverskuiwing in kurtose (sien einde van §2.3).

5. **Hiperboliese omskakeling.** Die vormverskuiwing word gemodelleer as 'n hiperboliese (sinh-) omskakeling van 'n byna normale drywer, wat die volgehoue oortollige kurtose verklaar sonder om die tempo van afplatting te verander (sien §2.4).
6. **Kalibrasie en toetsing.** Die parameters van die omskakeling word op data gekalibreer en getoets; die uitkoms is in lyn met die voorafgaande afleidings en ondersteun die interpretasie dat die waargenome kurtose deur 'n heuristiese vervorming ontstaan (sien einde van §4).

2.1 Epistemiese ondersoek

2.1.1 Nota oor wiskundige afleidings

Ten einde die hoofteks meer leesbaar te maak is die meeste wiskundige afleidings en verwysings na die aanhangsel, **A. Afleiding van funksies**, verskuif.

2.1.2 Nota oor terminologie

Die artikel verwys deurgaans na die volgende terminologie:

- **Inligting** of **inligtingstoestand** of **totale inligting** verwys na totale (publiek beskikbare) inligting op 'n bepaalde tyd, aangedui met die veranderlike I_t .
- **Inligtingsverandering** verwys na die ekstra inligting wat tot die totale inligting oor 'n periode toegevoeg is. Dit word aangedui met die stogastiese veranderlike X_I en word geassosieer met die digtheidsfunksie $g_I(\cdot)$.
- **Nuus** of **nuusbrokkie** verwys na 'n gestandaardiseerde weergawe van inligtingsverandering; word aangedui met die stogastiese veranderlike X ; en word geassosieer met die digtheidsfunksie $g_X(\cdot)$.
- **Konteks** of **nuusakkumulاسie** verwys na die som van n onafhanklike realisasies van X . Dit word aangedui met die stogastiese veranderlike X_N en word geassosieer met die digtheidsfunksie $g_N(\cdot)$. Konteks word (meestal implisiet) met tydskaal of aantal konvolusies gekwalifiseer. Dit moet beskou word as die akkumulاسie van nuus oor 'n bepaalde periode of aantal konvolusies.

2.1.3 Die digtheidsfunksie vir 'n brokkie nuus

Hierdie artikel beskou die totale inligtingstoestand, I_t . Aangesien inligting self geen inherente numeriese skaal het nie, word slegs die invloed van inligting op 'n waarneembare verskynsel beskryf – hier die aandeelprys S_t – wat veronderstel word om alle publiek beskikbare inligting tot en met t te inkorporeer.

Definieer prysverandering oor 'n kort interval, $[t, t + \Delta t]$ as

$$\Delta S_{t+\Delta t} := S_{t+\Delta t} - S_t,$$

en die inligtingsverandering (nuus) as

$$\Delta I_{t+\Delta t} := I_{t+\Delta t} - I_t.$$

Hier word aanvaar dat prysveranderinge uitsluitlik deur inligtingsverandering veroorsaak word. Die oordrag van inligtingsverandering na prys word beskryf deur 'n streng monotoon (toenemende) en onewe funksie, f :

$$\Delta S_{t+\Delta t} = f(\Delta I_{t+\Delta t}).$$

Vir klein Δt word aangeneem:

- (i) Die oorgrote meerderheid van veranderings in inligting het geen waarneembare invloed op die prys oor $[t, t + \Delta t]$ nie en gevolglik is $\Delta S_{t+\Delta t} = 0$ in die meeste gevalle.
- (ii) 'n Klein minderheid veranderings het 'n meetbare maar beskeie invloed, sodat $|\Delta S_{t+\Delta t}|$ klein is.
- (iii) 'n Minuskule klein fraksie veroorsaak wesenlike prysverskuiwings, wat lei tot beduidende $|\Delta S_{t+\Delta t}|$.

Hierdie patroon – hoë massa naby nul en swaar uiteindes – is versoenbaar met 'n kragwet-vorm vir die digtheid van inligtingsveranderings. Om hierdie gedrag op 'n eenvoudige wyse vas te vang, word 'n simmetriese kragwet-digtheid vir die inligtingsverandering gekies.

Laat $X_I := \Delta I_{t+\Delta t}$ die verandering in inligting voorstel. Daar word aanvaar dat X_I die digtheidsfunksie $g_I(\cdot; b, d)$ het ($X_I \sim g_I(\cdot; b, d)$) met parameters $b > 1$ en $d > 0$, en word gespesifiseer as

$$g_I(x; b, d) = \frac{(b-1)d^{b-1}}{2} \begin{cases} (d-x)^{-b}, \text{vir } x < 0 \\ (d+x)^{-b}, \text{vir } x \geq 0 \end{cases}$$

waar $\frac{(b-1)d^{b-1}}{2}$ verseker dat $\int_{-\infty}^{\infty} g_I(x; b, d) dx = 1$.

Die funksie $g_I(x; b, d)$ is 'n gesentreerde kragwet waarin twee parameters die vorm beheer: $b > 1$ bepaal hoe vinnig die uiteindes van die digtheid afneem (kleiner b impliseer swaarder uiteindes en 'n hoër frekwensie van groot skokke), terwyl $d > 0$ 'n klein skaalparameter is wat die digtheid rondom nul glad maak om 'n singulariteit te voorkom.

Laat $\mu_I := \mathbb{E}[X_I]$ en $\sigma_I := \sqrt{\text{Var}[X_I]}$ (wanneer dit bestaan),¹ en definieer die gestandaardiseerde veranderlike

$$X := \frac{X_I - \mu_I}{\sigma_I}.$$

Die gestandaardiseerde digtheidsfunksie vir nuus is dan

$$g_X(u; b, d) := \sigma_I g_I(\mu_I + \sigma_I u; b, d).$$

Vir wat volg is slegs die gestandaardiseerde digtheidsfunksie g_X nodig. Die klem val op die gedrag van die sentrale momente – veral kurtose – onder herhaalde konvolusie.

2.1.4 Markov-eienskap en die swak vorm van die doeltreffende-mark-hipotese

Die raamwerk van §2.1.3 – waar $\Delta S_{t+\Delta t} = f(\Delta I_{t+\Delta t})$ – word hier binne twee aannames geplaas wat as grondliggend in die kwantitatiewe finansiële literatuur geld: die Markov-eienskap en die swak vorm van die doeltreffende-mark-hipotese.

Eerstens word die Markov-eienskap aanvaar. Die voorwaardelike verspreiding van die verandering $\Delta S_{t+\Delta t}$ hang slegs van I_t af en is onafhanklik van die geskiedenis vóór t . (Cochrane 2005; Harrison en Pliska 1981; Merton 1973).

Tweedens word die swak vorm van die doeltreffende-mark-hipotese aanvaar. Laat $\mathcal{F}_t^S$ die σ -algebra wees wat deur publiek beskikbare prysinligting tot en met t gegenereer word, en $R_{t,\Delta t} := \ln \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}$. Definieer die voorwaardelike gemiddelde $\eta_{t,\Delta t} := \mathbb{E}[R_{t,\Delta t} | \mathcal{F}_t^S]$. Dan geld

$$\mathbb{E}[R_{t,\Delta t} - \eta_{t,\Delta t} | \mathcal{F}_t^S] = 0,$$

met ander woorde, gegee $\mathcal{F}_t^S$, is daar geen stelselmatige voorspelbaarheid in die volgende opbrengs bo en behalwe die voorwaardelike gemiddelde nie.

Beide aannames strook met §2.1.3, waar alle relevante geskiedenis in I_t opgesom word en die proses gevolglik as 'n Markov-proses beskryf kan word (vgl. Fama 1970; Samuelson 1965).

2.1.5 Konvolusie van inligting-gedrewe prosesse

Om die eienskappe van 'n inligtingsproses – in hierdie geval aandeelprysopbrengste – oor langer tydperke te ondersoek, word sommasies van onafhanklike waarnemings uit die verdeling $g_X(x; b, d)$ ondersoek.

Die digtheidsfunksie van die som van onafhanklike stogastiese veranderlikes word verkry deur konvolusie van hul individuele digtheidsfunksies. In hierdie geval is dit nie eenvoudig om herhaalde konvolusies van g_X analities te bereken nie. Daarom word die karakteristieke funksie van g_X eerder gebruik, wat aangedui word met $\varphi_X(s; b)$.

Daar word gebruik gemaak van die bekende eienskap van karakteristieke funksies, naamlik dat die karakteristieke funksie van die som van n onafhanklike veranderlikes gelyk is aan die produk van hul individuele karakteristieke funksies (Durrett 2020; Feller 1971). Hierdie eienskap maak dit moontlik om die karakteristieke funksie van die n -voudige konvolusie voor te stel as:

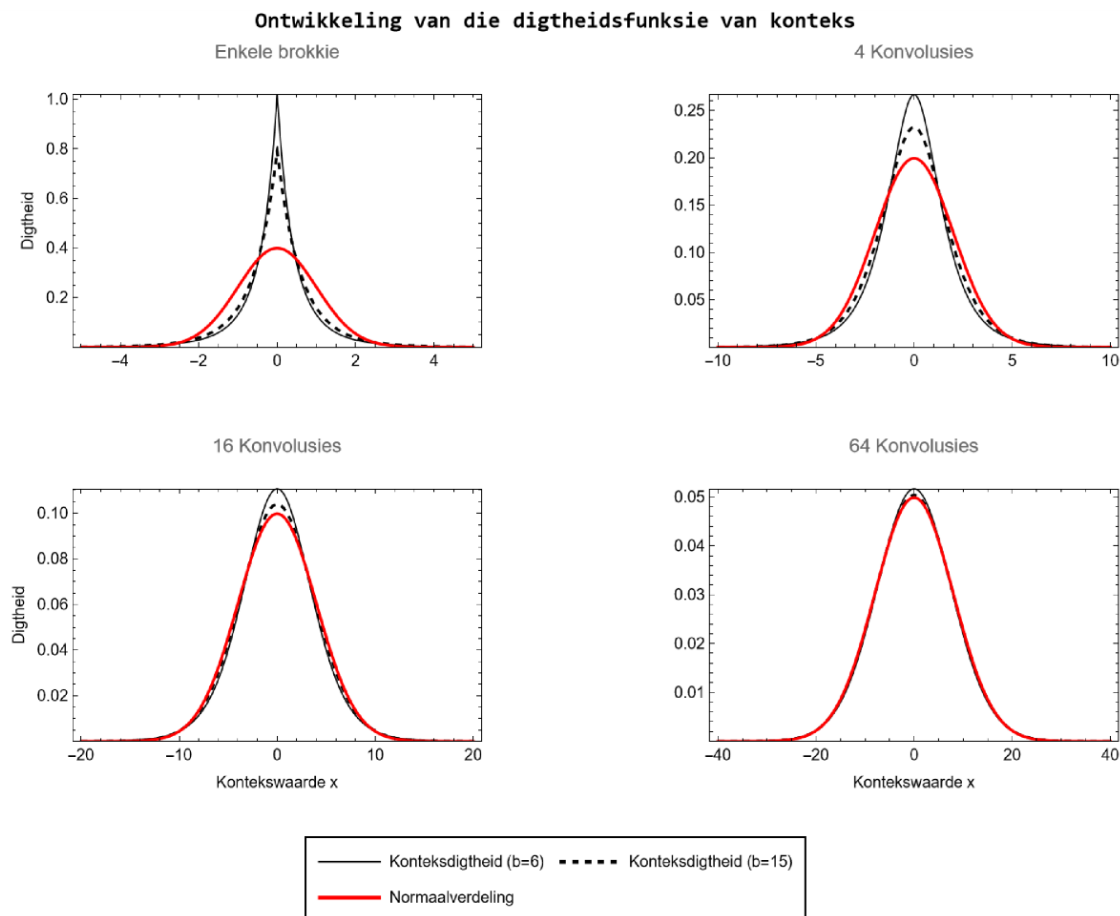
$$\varphi_N(s; n, b) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{isx} g_X(x; b, d) dx \right)^n.$$

Sodra die karakteristieke funksie bepaal is, word die inverse diskrete Fourier-transformasie (IDFT) – bereken met 'n vinnige Fourier-transform (FFT)-algoritme – gebruik om die digtheid van die som van onafhanklike stogastiese veranderlikes te verkry, wat vervolgens numeries geïntegreer word om die verdelingsfunksie te bepaal:

$$g_N(x; n, b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \varphi_N(s; n, b) ds.$$

In $g_N(x; n, b)$ dui n die aantal onafhanklike nuusbrokkies aan wat saamgevoeg word om die konteksveranderlike X_N te vorm. Die parameter b bepaal steeds die tempo waarteen die uiteindes van die digtheid afneem en gevolglik die kurtose van g_N . Let op dat die parameter d geen rol meer speel in φ_N of g_N nie. Die doel van d was oorspronklik om 'n wiskundige singulariteit in g_X te vermy, maar die normalisering van g_X maak dit in die praktyk oorbodig.

Figuur 1 toon digtheidsfunksies $g_N(x; n, b)$ van konteks, dit wil sê sommasies van n onafhanklike veranderlikes $X \sim g_X(x; b, d)$, vir twee waardes van b , naamlik $b = 6$ en $b = 15$.² In elke geval is 'n normaalverdeling met soortgelyke standaardafwyking oor die konteksdigtheid gesuperponeer. Na slegs 64 konvolusies vertoon die konteksdigtheid reeds sterk ooreenkomste met 'n normaalverdeling, soos verwag op grond van die sentrale limietstelling.



Figuur 1. Numeriese oplossings van $g_N(x; n, b)$ na 4, 16 en 64 konvolusies van onafhanklike gestandaardiseerde $X \sim g_X(x; b, d)$ vir onderskeidelik $b = 6$ en $b = 15$ en normaalverdeling met dieselfde variansie

2.1.6 Sentrale momente

Vanuit die definisie van $g_N(x; n, b)$ is die eerste drie sentrale momente maklik afleibaar. Die gemiddeld van die verdeling is 0, die variansie is n en skeefheid is 0, danksy die simmetriese aard van die funksie rondom die oorsprong. Die fokus hier is dus uitsluitlik op die bepaling van die kurtose. Dit word direk bepaal uit $\varphi_N(s; n, b)$ (vgl. § A.e. **Momente uit die karakteristieke funksie**):

$$\kappa(n; b) = 3 + \frac{3(b^2 - b - 8)}{n(b-4)(b-5)}.$$

2.2 Empiriese ondersoek

2.2.1 Databron en datamanipulasies

Die empiriese ondersoek maak gebruik van opbrengsdata van die FTSE/JSE Top 40 Total Return Index³ (hierna J200T genoem). Hierdie spesifieke indeks is om verskeie redes geskik vir die beoogde ontleding:

- J200T bestaan uit die mees likiede aandele op die JSE, wat beteken dat aktiewe verhandeling gereeld plaasvind. Dit maak dit moontlik om opbrengste oor baie kort tydsintervalle te meet.
- Dit is 'n totale-opbrengs-indeks, wat beteken dat dividende en regte uitgifte herbelê word en nie afsonderlik verreken hoef te word nie. Dit vereenvoudig die interpretasie van opbrengste.
- Alhoewel J200T-prysdata slegs op 'n daaglikse basis beskikbaar is, is dit nie 'n beperking nie. Omdat die ontleding primêr op opbrengste (en nie pryse nie) fokus, kan korttermynopbrengste met goeie akkuraatheid afgelei word uit die FTSE/JSE Top 40 Index⁴ (hierna J200 genoem), wat intra-dag-publikasies bied. Dit is moontlik omdat aandele oornag die oorgang van *cum*-dividend na *ex*-dividend maak, sodat die intra-dag-opbrengste van J200 en J200T identies is.

Data is van **DataScope**⁵ verkry, 'n platform wat deur **Refinitiv** voorsien word.

2.2.2 Datavoorbereiding en tydskaal

Opbrengsdata is versamel vir verskeie tydskaal – vanaf 1 sekonde tot 1 dag. Vir langer tydperke (weekliks, maandeliks, ens.) is daaglikse data as basis gebruik. In daardie geval is oorvleueling van periodes noulettend vermy.

Die historiese periode waarvoor data ingesamel is, strek van Januarie 2007 tot einde Mei 2025.

Die logaritmiëse opbrengs is vir elke frekwensie bereken volgens:

$$R_k = \ln \frac{S(t_k)}{S(t_{k-1})},$$

waar R_k die opbrengs op tydstip t_k voorstel, en $S(t_k)$ die waarde van die indeks is. Die uitdrukking t_{k-1} verwys na die vorige tydstap, waarvan die lengte ooreenstem met die tydskaal van die datastel (bv. 1 uur, 1 dag, ens.).

Let daarop dat die werklike tydsverloop tussen t_{k-1} en t_k nie altyd konstant is nie. Byvoorbeeld:

- In daaglikse data kan naweke en openbare vakansiedae tot periodes langer as 24 uur lei.
- In uurlikse data kan die tyd tussen die sluiting van een dag en die opening van die volgende dag meer as een uur wees.

Om konsekwente opbrengste te verseker, is data gefiltreer om slegs waarnemings te gebruik wat presies aan die tydskaalvereiste voldoen, byvoorbeeld:

- Naweke is uitgesluit in die geval van daaglikse data.
- Die eerste uur van daaglikse verhandeling, wat die oornag-opbrengs insluit, is uitgesluit in die geval van uurlikse data.

Hierdie reëls is konsekwent toegepas vir alle tydskaal van 1 sekonde tot 1 dag.

2.2.3 Langer tydperke

Vir tydskaal langer as 1 dag is praktiese kompromieë aangegaan om die aantal datapunte te maksimeer. Die meetperiodes is soos volg gedefinieer:

- **Weeklikse data:** van die eerste werksdag van een week tot die eerste werksdag van die volgende week. Die periode is dus nie altyd presies 7 dae nie.
- **Maandelikse data:** van die eerste werksdag van die maand tot die eerste werksdag van die daaropvolgende maand.
- **Kwartaallikse data:** van die eerste werksdag van die kwartaal-maand (Maart, Junie, September, Desember) tot die eerste werksdag van die volgende kwartaal-maand.
- **Jaarlikse data:** van die eerste werksdag van die jaar tot die eerste werksdag van die daaropvolgende jaar.

2.2.4 Beskrywende statistiek

Tabel 1 som beskrywende statistiek vir log-opbrengste $R_k = \ln \frac{S(t_k)}{S(t_{k-1})}$ op. Omdat log-opbrengste dimensieloos is, het gemiddeld, variansie, standaardafwyking, skeefheid en kurtose geen eenhede nie. Slegs die tydskaal (in sekondes) word eksplisiet aangedui.

Tabel 1. Beskrywende statistiek vir log-opbrengste op verskillende tydskaal. Die ry “Sekondes” gee die lengte van die tydsinterval; alle ander statistieke is dimensieloos omdat log-opbrengste geen eenheid het nie

Data Tydskaal	Jaar	Kwartaal	Maand	Week	Dag	Uur
Sekondes	31536000	7862400	2620800	604800	86400	3600
Gemiddeld	0.98×10^{-1}	2.51×10^{-2}	0.85×10^{-2}	2.00×10^{-3}	3.12×10^{-4}	-0.46×10^{-4}
Variansie	1.76×10^{-2}	0.61×10^{-2}	2.03×10^{-3}	0.82×10^{-3}	1.61×10^{-4}	0.99×10^{-5}
Standaard-afwyking	1.33×10^{-1}	0.78×10^{-1}	0.45×10^{-1}	2.87×10^{-2}	1.27×10^{-2}	3.15×10^{-3}
Skeefheid	-1.36	-0.74	-2.59×10^{-1}	-0.44	-1.23×10^{-1}	-0.67×10^{-1}
Kurtose	5.43	6.89	4.08	7.33	7.76	12.07

Data Tydskaal	Kwartier	10 Minute	5 Minute	1 Minuut	5 Sekondes	1 Sekonde
Sekondes	900	600	300	60	5	1
Gemiddeld	-1.08×10^{-5}	-0.62×10^{-5}	-3.09×10^{-6}	-0.53×10^{-6}	3.03×10^{-8}	-2.61×10^{-9}
Variansie	2.65×10^{-6}	1.79×10^{-6}	0.94×10^{-6}	1.90×10^{-7}	1.42×10^{-8}	0.44×10^{-8}
Standaard-afwyking	1.63×10^{-3}	1.34×10^{-3}	0.97×10^{-3}	0.44×10^{-3}	1.19×10^{-4}	0.66×10^{-4}
Skeefheid	-1.00×10^{-2}	-0.52×10^{-1}	-1.81×10^{-1}	-2.05×10^{-1}	-0.47	0.40
Kurtose	14.42	15.38	0.37×10^2	0.59×10^2	0.55×10^3	1.33×10^3

Omdat kurtose die sentrale onderwerp van die studie is, volg hier onder slegs ’n bondige opmerking oor gemiddeld, variansie en skeefheid. Die uitgebreide ontleding fokus op die gedrag van kurtose oor tydskaal.

Gemiddeld. Die gemiddelde opbrengs neem, soos verwag, nagenoeg lineêr met tydsinterval toe, sodat die gemiddelde oor baie kort horisonne in die praktyk naby nul is.

Variansie. In ’n proses met onafhanklike, stasionêre inkremente behoort die variansie lineêr met die tydsinterval te skaal. ’n Nie-lineêre skaalpatroon word egter waargeneem en oor kort skale beskryf ’n magswet dit beter. Dat variansie nie altyd lineêr oor horisonne skaal nie, is reeds gerapporteer – byvoorbeeld deur variansieverhoudingstoetse wat die nulhipotese van ’n stogastiese beweging verwerp (Lo en MacKinlay 1988). Variansie is nie die hoofokus hier nie en die bevinding word slegs ter volledigheid gemeld.

Skeefheid. Gegewe die simmetrie-aanname van die inligtingsverdeling, en die sensitiviteit van skeefheid vir uitskieters, word dit nie verder bespreek nie.

Kurtose

Kurtose is 'n hoërorde-moment en dus vatbaar vir uitskieters en beperkte waarnemings. Dit toon egter 'n duidelike patroon wat goed deur 'n magsfunksie benader kan word:

$$\hat{\gamma}_2(\tau) = 3 + (1.5599 + 27.2 \cdot \tau^{-0.4020})^{2.1417},$$

waar die opbrengstydskaal, τ , die aantal sekondes tussen waarnemings is.

Hierdie funksie pas uitstekend by die data, met $R^2 = 0.98$. Figuur 3 toon 'n log-log-plot van kurtose teenoor opbrengstydskaal, met beraamde waardes, $\hat{\gamma}_2(\tau)$, op die kromme gesuperponeer.

'n Probleem met hierdie benadering is dat die funksie die volgende tydskaallimiet het:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{\gamma}_2(\tau) = 3 + 1.5599^{2.1417} \approx 5.59.$$

Met ander woorde: Volgens hierdie beraming daal kurtose nooit tot 3 (die waarde vir 'n normaalverdeling) nie – selfs nie vir baie lang tydskaale nie. Verskeie alternatiewe funksies is getoets, maar in geen geval stabiliseer die kurtose by 3 nie. Indien aandeelpriyse uitsluitlik deur 'n onderliggende inligtingproses bepaal word, sou verwag word dat dit uiteindelik na 'n normaalverdeling konvergeer (volgens die sentrale limietstelling). Hierdie afwyking is dus betekenisvol.

'n Tweede interessante waarneming is dat kurtose waarskynlik nie hoofsaaklik veroorsaak word deur trosvorming (Cont 2001; Fama 1965) nie. Figuur 4 toon dat die tydreeks vir daaglikse opbrengste wel duidelike periodes van hoë en lae volatiliteit het – 'n bekende kenmerk van trosvorming. Hierdie gedrag lei tot positiewe outokorrelasie in die kwadraat-opbrengste, en is waarneembaar oor alle korttermyn tydskaale.

Outokorrelasie kan redelik suksesvol gemodelleer word deur 'n GARCH(1,1)-proses (Bollerslev 1986):

$$h_t = \omega + \alpha x_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}, \quad x_t \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Indien trosvorming met hierdie model benader word, is dit duidelik dat kurtose en outokorrelasie verwant is. Volgens Bai, Russel en Tiao (2003) word die kurtose van 'n GARCH(1,1)-proses gegee deur:

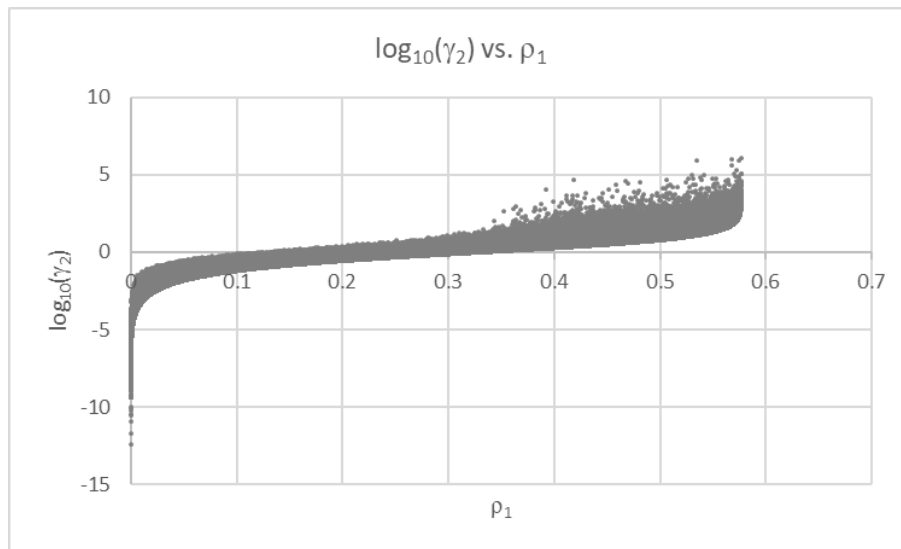
$$\gamma_2 = \frac{6\alpha^2}{1 - (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha^2}.$$

Die enkeltydsloering-outokorrelasie word gegee deur:

$$\rho_1 = \alpha \frac{1 - (\alpha + \beta)^2 + \alpha(\alpha + \beta)}{1 - (\alpha + \beta)^2 + \alpha^2}.$$

Om die impak van outokorrelasie op kurtose te ondersoek, is 1 miljoen geldige⁶ parameterpare, (α, β) , ewekansig gegenereer, en vir elke paar die ooreenstemmende waardes van kurtose γ_2

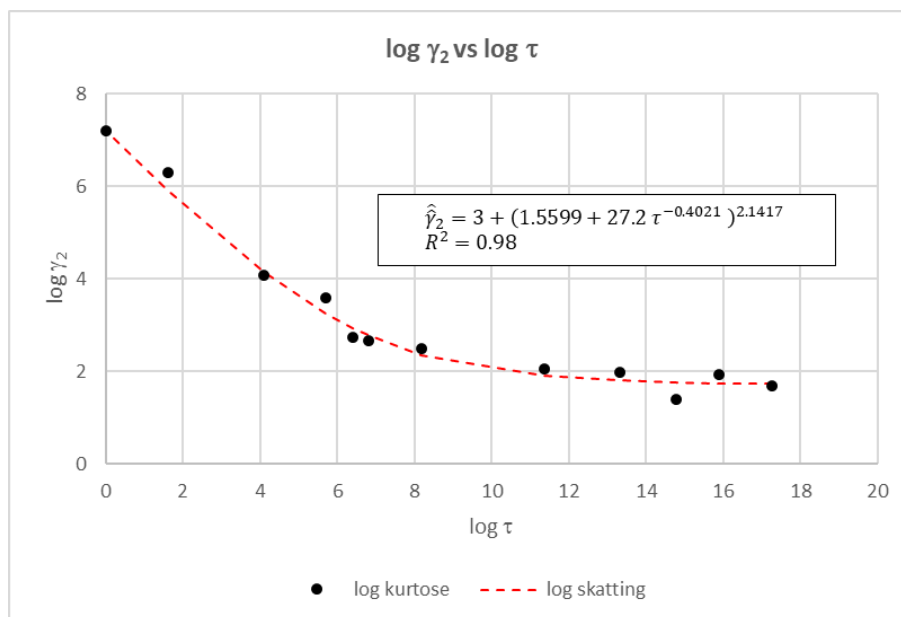
en enkeltydsloering-outokorrelasie ρ_1 bereken. Figuur 2 toon die logaritme (grondtal 10) van kurtose uitgebeeld teenoor ρ_1 .



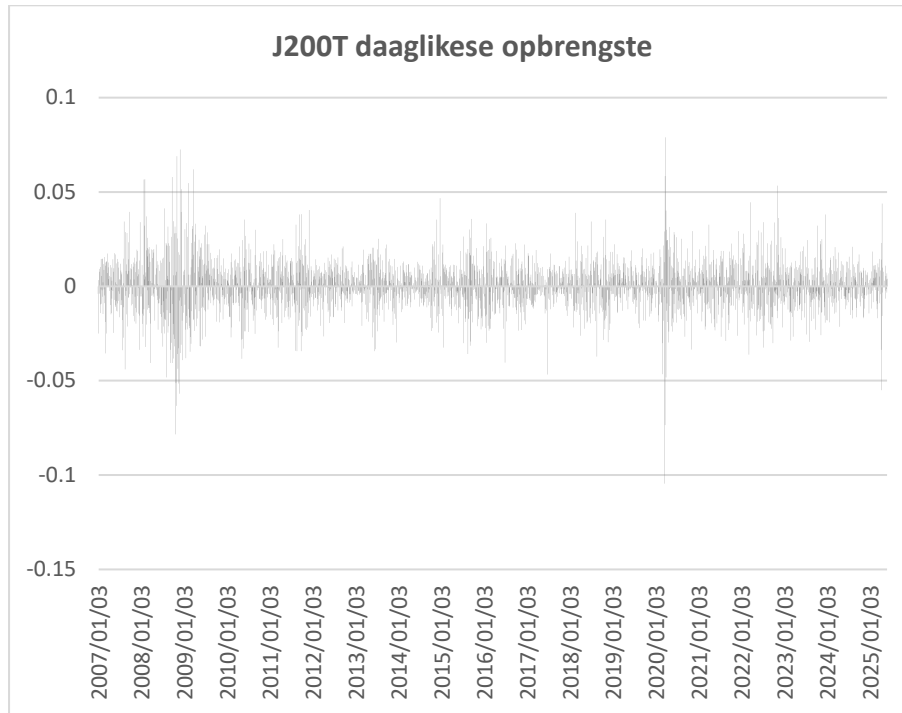
Figuur 2. Kurtose en enkeltydsloering-outokorrelasie vanuit GARCH(1,1) vir 1 miljoen geldige α - en β -waardes

Hieruit blyk 'n duidelike verband tussen kurtose en outokorrelasie: Hoe hoër die kurtose, hoe hoër moet die outokorrelasie wees, maar in die empiriese data is die enkeltydsloering-outokorrelasie oor kort tydskale baie klein. Byvoorbeeld: vir 1-minuut-opbrengste is $\rho_1 \approx 0.016$ wat volgens GARCH(1,1) nie kan lei tot 'n waargenome kurtose van $\gamma_2 \approx 59$ nie.

Die afleiding is dus dat hoewel trosvorming 'n rol speel in verhoogde kurtose, is dit nie die primêre oorsaak nie (vgl. Cont 2001). Die gedrag van kurtose dui eerder op die bestaan van 'n verbuigingsfunksie.



Figuur 3. Log-log-plot van kurtose teenoor opbrengstydskaal



Figuur 4. Daaglikse opbrengste van J200T

2.3 Versoening van empiriese data en epistemiese verwagtinge

Daar bestaan nie 'n eenvoudige of natuurlike manier om die aantal konvolusies, n , van die konteks direk te verbind aan die empiriese opbrengstydskaal, τ , soos gemeet in sekondes, nie.

Die benadering hier is om eerstens die vereiste dat n 'n heelgetal moet wees, te verwater. Vervolgens word daar gepoog om die verloop van kurtose, soos voorspel deur die teoretiese funksie $\kappa(n; b)$, so goed moontlik te laat ooreenstem met die empiriese beraming $\hat{\gamma}_2(\tau)$.

Beide funksies neem hul maksimum aan wanneer $n \rightarrow 0$ en $\tau \rightarrow 0$ en vlak af soos $n \rightarrow \infty$ en $\tau \rightarrow \infty$. Intuïtief gesien beteken dit dat beide funksies dieselfde tipe afname toon; kurtose verval oor tydskaal of konvolusies. Daar word dus na 'n gebied gesoek, $n_0 \leq n \leq n_1$ en $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_1$, waar die helling van die afgeleides van hierdie twee funksies ooreenstem; met ander woorde, waar die fase van kurtoseverval dieselfde is.

Omdat $\kappa(n, b)$ van n afhang, en $\hat{\gamma}_2(\tau)$ van τ , is 'n funksionele skakel nodig tussen n en τ sodat die kettingreël geldig is:

$$\frac{\partial \kappa(n, b)}{\partial \tau} = \frac{\partial \kappa(n, b)}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial \tau}.$$

Verskeie funksionele vorms vir $n(\tau)$ is empiries ondersoek. Die funksie wat die beste resultate opgelewer het, het die vorm:

$$n(\tau; n_1, n_2, n_3) \approx \exp(n_1(\log \tau)^2 + n_2 \log \tau + n_3).$$

Die parameters (b, n_1, n_2, n_3) is deur middel van die Nelder–Mead-algoritme (Nelder en Mead 1965) geoptimeer. Die fout wat deur middel van die algoritme geminimeer word, is soos volg gedefinieer:

$$\varepsilon := \sum \log \left| \frac{\partial \kappa / \partial \tau}{\partial \hat{\gamma}_2 / \partial \tau} \right|.$$

Die afgeleide van κ het die volgende vorm:

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \tau} = - \frac{3(b(b-1)-8)(n_2+2n_1 \log \tau)}{(b-5)(b-4)\tau^{n_2+1}} e^{-n_3-n_1(\log \tau)^2},$$

en vir $\hat{\gamma}_2(\tau)$ die vorm

$$\frac{\partial \hat{\gamma}_2}{\partial \tau} = \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \tau^{\alpha_3-1} (\alpha_1 + \alpha_2 t^{\alpha_3})^{\alpha_4-1}.$$

Die parameters wat die beste passing gelever het, is:

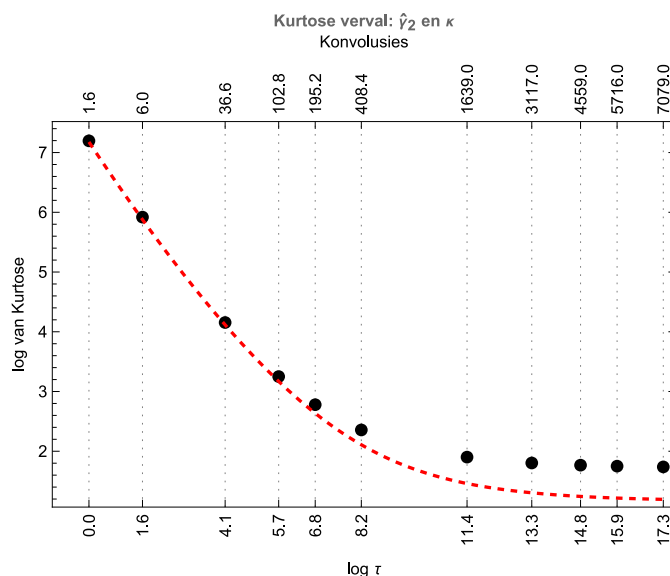
$$(b, n_1, n_2, n_3) = (5.017, -0.0208, 0.8448, 0.4916).$$

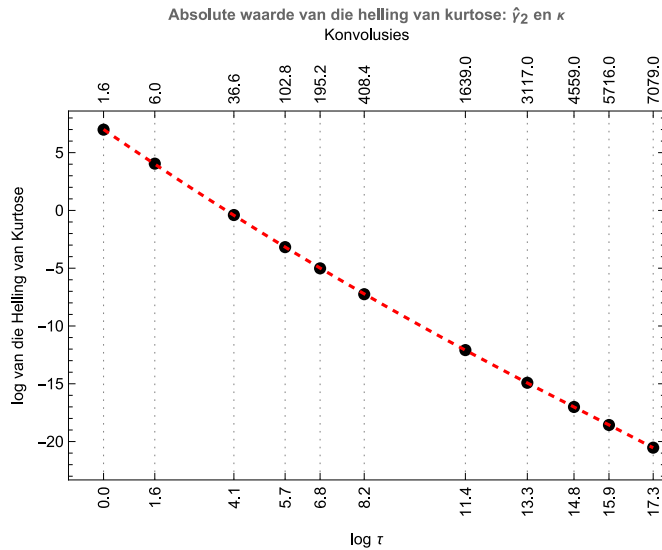
Hiermee is 'n uitstekende passing behaal, met $R^2 = 0.9999$ en fout $\varepsilon = 0.005$.

Figuur 5 toon die verloop van kurtose en die helling van kurtose vir konteks oor 'n konvolusiebereik van 1.6 tot 7079. Hierdie verloop kom merkwaardig goed ooreen met dié van die empiries beraamde kurtose, $\hat{\gamma}_2$, gemeet oor opbrengstydskale van 1 sekonde tot 1 jaar.

Hoewel die hellings uitstekend ooreenstem – wat sterk aandui dat beide funksies in dieselfde fase van kurtoseverval verkeer – is die empiriese kurtose steeds opmerklik hoër as dié van die teoretiese konteks.

Skattings van verval in kurtose





Figuur 5. Die verval in kurtose na aanleiding van konvolusies, in die geval van konteks (rooi stippellyn), en opbrengs-tydskaal in die geval van empiriese metings (swart merkers)

Nog 'n opvallende resultaat is dat, deur net die eerste afgeleides van $\kappa(n)$ en $\hat{\gamma}_2(\tau)$ met mekaar te laat ooreenstem, ook 'n baie goeie passing van hoërde-afgeleides op die koop toe verkry is. Figuur 6 toon die passing tot en met die vyfde afgeleide, met opvallende akkuraatheid.

Aangesien die Taylor-reeks uitbreiding gee:

$$\hat{\gamma}_2(\tau + \Delta\tau) = \hat{\gamma}_2(\tau) + \Delta\tau \hat{\gamma}_2'(\tau) + \frac{\Delta\tau^2}{2} \hat{\gamma}_2''(\tau) + \dots,$$

en die afgeleides van $\hat{\gamma}_2$ en κ byna identies is, volg daaruit dat:

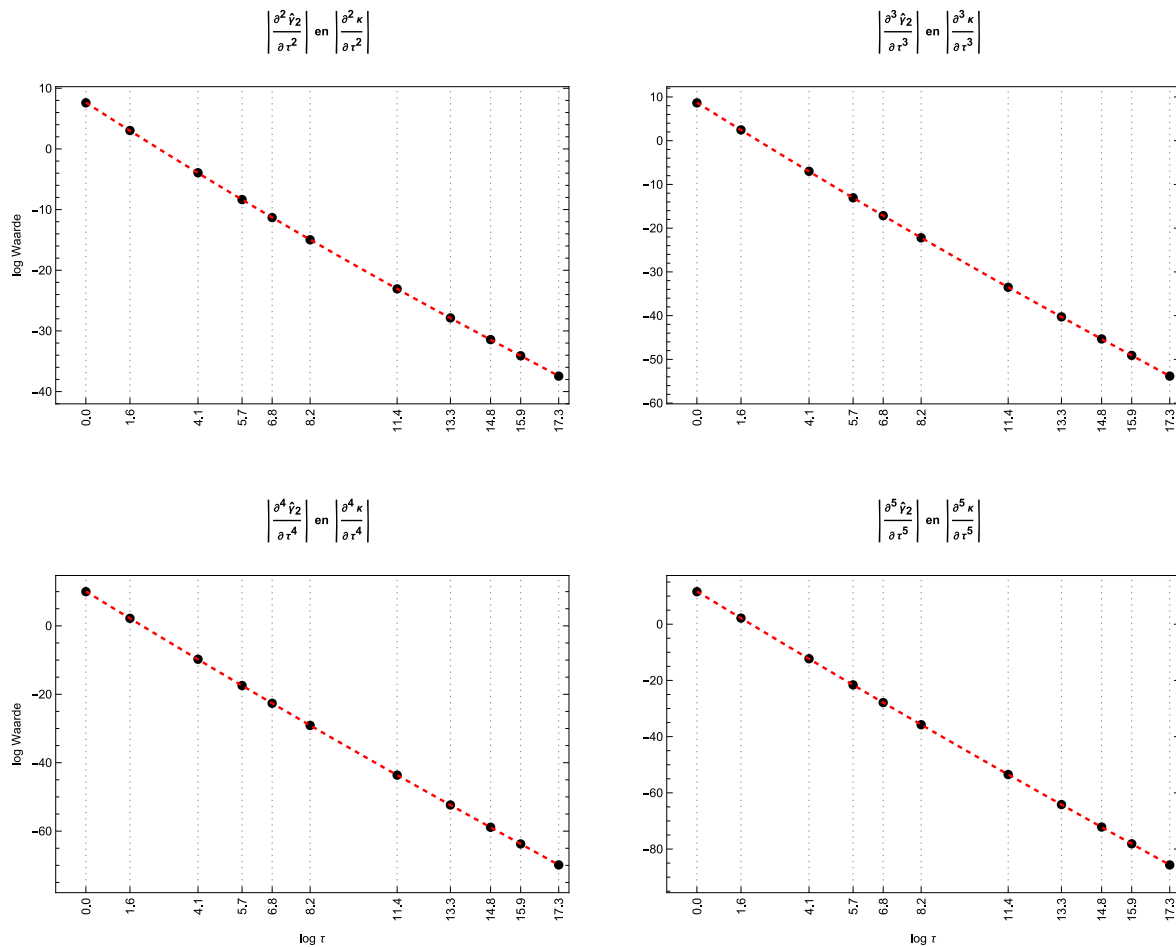
$$\hat{\gamma}_2(\tau + \Delta\tau) - \hat{\gamma}_2(\tau) \approx \kappa(\tau + \Delta\tau) - \kappa(\tau).$$

Die interpretasie is dat die verval in kurtose, soos waargeneem by alle opbrengstydskale, volledig verklaar kan word deur die akkumulasie van nuus.

Maar die empiriese kurtose bly deurgaans hoër as wat deur teoretiese sommering van nuus verklaar kan word. Soos vroeër aangetoon, blyk dit nie dat die oortollige kurtose van aandeel-prysopbrengste ooit heeltemal verdwyn nie.

Hierdie hardnekkige kurtose impliseer dat die oorsaak nie in die sommering van nuus lê nie, maar eerder in 'n transformasie of verbuiging wat ná die tyd plaasvind.

Vergelyking van hoërorde-afgeleides van kurtose



Figuur 6. Vergelyking van die absolute waardes van hoërorde-afgeleides van die kurtose van konteks (κ , rooi stippellyn) en die beraming van die kurtose van empiriese waarnemings ($\hat{\gamma}^2$, swart merkers) vir verskillende tydskaal

2.4 Hiperboliese omskakeling

2.4.1 Motivering

Die resultate van hierdie studie bied getuieis dat aandeelprysopbrengste oortollige kurtose toon wat nie uitsluitlik verklaar kan word deur 'n teoretiese sommering van nuusbrokkies nie. Selfs nadat 'n funksionele skakel tussen opbrengsttydskaal en aantal konvolusies van konteks afgelei is – en 'n merkwaardige passing tussen hul eerste en hoërorde-afgeleides verkry is – bly die empiriese kurtose konsekwent hoër as dié van teoretiese konteks. Hierdie verskynsel dui op die teenwoordigheid van 'n verbuiging wat nie inherent aan die inligting self is nie, maar eerder aan die proses waardeur inligting in pryse weerspieël word.

Hierdie waarneming stem ooreen met die gedagtemodel wat deur Bouwer en Maré (2025) uiteengesit is. Daar is aangetoon dat wanneer 'n kwantifiseerbare eienskap beraam word vanuit 'n onkwantifiseerbare verskynsel, beramers geneig is om interpolasies uit te voer op die waarde-as (wat meetbaar is), in plaas daarvan om op die definisiegebied self (wat latent of

onkwantifiseerbaar is) te werk. Dit lei, onder bepaalde aannames, tot 'n stelselmatige vervorming van die onderliggende verdeling – 'n verskynsel wat wiskundig beskryf kan word deur 'n hiperboliese funksie.

In die epistemiese deel is getoon dat konteks reeds ná relatief min konvolusies – soms slegs 'n paar minute – bykans normaal lyk (vgl. Figuur 1). Op daaglikse skale kom waarnemings dus effektief uit $g_N(x, n; b)$ met n in die honderde of duisende. Die onderliggende konteks behoort gevolglik weinig oortollige kurtose te toon; met ander woorde, die definisiegebied vir inligting is op dié skaal feitlik normaal. Die waarneembare waarde-as (opbrengste) word egter deur die oorgang van onkwantifiseerbare inligting na kwantifiseerbare pryse bepaal en dit is juis dié oorgang wat lei tot die vervorming.

Indien markdeelnemers nie toegang het tot die onkwantifiseerbare konteks nie, moet hulle hul oordeel baseer op waarneembare gedrag, soos vorige prysbewegings tydens soortgelyke situasies. Die interpolasies wat daaruit volg – met ander woorde, beramings oor waarde gebaseer op beperkte verwysingspunte – is onder die betrokke omstandighede proporsioneel ekwivalent aan interpolasies op die funksionele kromme. Hierdie interpolasie is nie lineêr nie, maar toon hiperboliese afwyking, wat 'n natuurlike verklaring bied vir die oorblywende en knaende kurtose in aandeelprysopbrengste.

Hierdie interpretasie is nie net konseptueel aanneemlik nie, maar sluit ook goed aan by die empiriese bevinding: Hoewel die tempo van verval van kurtose tussen konteks en die waargenome data ooreenstem, konvergeer hul vlakke nie. Dit laat die vermoede ontstaan dat die proses waardeur inligting in prys omskep word, self 'n bron van strukturele afwyking is. Hierdie gevolgtrekking ondersteun dus die idee van 'n hiperboliese transformasie wat ontstaan vanuit epistemiese beperkings.

2.4.2 Bondige afleiding van hiperboliese omskakeling

'n Volledige afleiding van hiperboliese omskakeling val buite die bestek van hierdie artikel. 'n Bespreking word deur Bouwer en Maré (2025) uiteengesit. Hier word slegs die hoofgedagte saamgevat.

Laat $X \sim g_X(\cdot; b, d)$ die latente waarde vir gestandaardiseerde nuusbrokkies wees (vgl. §2.1.3). Laat $X_N = \sum_{i=1}^n X_i$ die konteks met digtheid $g_N(\cdot; n, b)$ wees (vgl. §2.1.5). Kies n sódanig dat, vir klein $\varepsilon > 0$, die volgende geld:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathbb{P}(U \leq x) - \Phi(x)| \leq \varepsilon,$$

waar $U = \frac{X_N}{\sqrt{n}}$ die latente, gestandaardiseerde konteks is, en $\Phi(\cdot)$ die verdelingsfunksie vir 'n standaard-normaalverdeling. Vanuit hierdie konstruk volg dat $U \approx \mathcal{N}(0,1)$.

Die kern-aanname vir hiperboliese omskakeling is dat opbrengste en konteks in ideale omstandighede, waar konteks direk kwantifiseerbaar is, in 'n affiene verhouding staan:

$$R = \xi_0(U), \quad \xi_0(x) = \hat{\mu}_u + \hat{\sigma}_U x.$$

Hier verteenwoordig ξ_0 'n lineêre basisafbeelding tussen (teoretiese) konteks en opbrengs. Omdat U latent is, kan R nie direk bepaal word nie. Kwalitatiewe konteks (akkumulasie van nuusberigte, finansiële state, ens.), daarenteen, is wel waarneembaar en kan met gerealiseerde opbrengste geassosieer word. Laat $Y = \{(R_i, v_i)\}_{i=1}^m$ die geordende (met $R_1 \leq R_2 \leq \dots \leq R_m$) katalogus wees wat gerealiseerde opbrengste (R_i) met kwalitatiewe konteks (v_i) assosieer. Die huidige kwalitatiewe konteks, v_s , word met historiese kontekste vergelyk. Twee kwalitatiewe konteksankers, v_r en v_t , met bekende opbrengste R_r en R_t , wat v_s die beste omringing gee, $v_r \preccurlyeq v_s \preccurlyeq v_t$, word gekies.

Aangesien U latent is, word 'n waarde aan die opbrengs R_s toegeken deur middel van plaaslike interpolasie. Laat u_s^* die (onwaarneembare) uitkoms uit U wees, wat met konteks v_s saamval. Laat $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die (moontlik nie-lineêre) konteks-opbrengsafbeelding wees. 'n Eerste-orde-beraming vir R_s word gegee deur

$$\hat{R}_s = R_r + \delta \xi'(u_s^*),$$

waar $\delta > 0$ die plaaslike stapgrootte is.

Om 'n funksionele vorm vir ξ' vas te lê, word die booglengte-formule aangewend:

$$\mathcal{L}(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (\xi'(u))^2} du.$$

Vir die lineêre basisgeval is $\xi'_0(u_s^*) = \hat{\sigma}_U$ konstant. Die booglengte van ξ_0 oor $[a, b]$ gee dan

$$\mathcal{L}_0(a, b) = \sqrt{1 + \hat{\sigma}_U^2} (b - a),$$

terwyl

$$\xi_0(b) - \xi_0(a) = \hat{\sigma}_U (b - a) = \frac{\hat{\sigma}_U}{\sqrt{1 + \hat{\sigma}_U^2}} \mathcal{L}_0(a, b).$$

Verandering in opbrengs is in die lineêre basisgeval dus proporsioneel tot booglengte. Die heuristiese uitgangspunt vir hiperboliese omskakeling is dat, wanneer 'n kwantifiseerbare eienskap (opbrengs) uit 'n onkwantifiseerbare verskynsel (konteks) beraam word, die mark optree asof hierdie verhouding behoue bly: Beramers verrig interpolasie op die waarde-as en fokus op verskille in opbrengs, eerder as op die latente veranderlike self. In hierdie sin vervaag die grens tussen die werklike opbrengsafbeelding en die lineêre basisafbeelding.

Prakties beteken dit dat die plaaslike verandering in opbrengs tussen die anker R_r en die beraamde waarde $\hat{R}_s$ benader word asof dit deur die booglengte langs die werklike afbeelding ξ bepaal word. Daar word dus veronderstel dat

$$\hat{R}_s - R_r \stackrel{\text{heuristies}}{\approx} \tilde{\kappa} \int_{u_r}^{u_s^*} \sqrt{1 + (\xi'(u))^2} du,$$

vir 'n geskikte konstante $\tilde{\kappa} = \frac{\hat{\sigma}_U}{\sqrt{1 + \hat{\sigma}_U^2}}$. In kombinasie met (2.14) is

$$\hat{R}_S - R_r = \delta \xi'(u_s^*),$$

gee dit

$$\xi'(u_s^*) = \kappa \int_{u_r}^{u_s^*} \sqrt{1 + (\xi'(u))^2} du, \quad \kappa = \frac{\tilde{\kappa}}{\delta} > 0.$$

Met $z(x) := \xi'(x)$ en vaste u_r gee differensiasie $z'(x) = \kappa \sqrt{1 + z^2}$. Skeiding van veranderlikes en integrasie lewer

$$\operatorname{asinh} z(x) = \kappa x + \lambda \quad \Rightarrow \quad \xi'(x) = \sinh(\kappa x + \lambda),$$

waar λ die integrasiekonstante is. Die plaaslike beraamde aandeelprysopbrengs is dus

$$\hat{R}_S \approx R_r + \delta \sinh(\kappa u_s^* + \lambda).$$

2.4.3 Aandeelprysopbrengste

Die doel in hierdie afdeling is om aandeelprysopbrengste te modelleer deur gebruik te maak van die beginsel van hiperboliese omskakeling. Die fokus val op daaglikse opbrengsdata van J200T, met die oog op twee aspekte:

1. Om die statistiese eienskappe van die opbrengsverdeling realisties na te boots; en
2. Om die verskynsel van trosvorming in te sluit.

Die model wat voorgestel word het die volgende vorm:

$$\Delta Y_t = \mu + \sigma_t \cdot Z(X_t; \lambda, \kappa),$$

waar:

- $Y_t = \log S_t$.
- $\Delta Y_t = Y_{t+\Delta t} - Y_t$ is die prysopbrengs oor tydinterval Δt ,
- μ, λ en κ is parameters wat deur middel van kalibrasie bepaal word,
- $X_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ is 'n standaard- normaal verdeelde stogastiese veranderlike,
- σ_t is 'n tydafhanklike skaalparameter (standaardafwyking).

Die funksie $Z(x; \lambda, \kappa)$ word gedefinieer as:

$$Z(x; \lambda, \kappa) = \frac{\sinh(\kappa x + \lambda) - z_1}{z_2},$$

waar z_1 en z_2 onderskeidelik die gemiddeld en standaardafwyking van $\sinh(\kappa X_t + \lambda)$ voorstel, met:

$$z_1 = \exp\left(\frac{1}{2}\kappa^2\right) \cdot \sinh(\lambda)$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\exp(\kappa^2) - 1)(\exp(\kappa^2) \cdot \cosh(2\lambda) + 1)}.$$

Hieruit volg dat $Z(x; \lambda, \kappa)$ so gedefinieer is dat dit 'n gemiddeld van 0 en 'n standaardafwyking van 1 het. Die onderliggende verdeling stem ooreen met 'n genormaliseerde weergawe van die Johnson SU -verdeling (Johnson 1949). Die bepaalde vorm van $Z(x; \lambda, \kappa)$ bied twee voordele:

- die volatiliteit kan onafhanklik deur σ_t gemodelleer word, aangesien $Z(x; \lambda, \kappa)$ gestandaardiseer is, en
- die hiperboliese eienskappe van die opbrengste word akkuraat vasgevang.

Die rol van μ en σ_t is dus om die geskikte gemiddeld en skaal van die opbrengsverdeling intuïtief en buigsaam voor te stel.

Om trosvorming te modelleer, word σ_t eksplisiet afhanklik van tyd gemaak deur 'n GARCH(1,1)-proses te gebruik. Die variansie word soos volg voorgestel:

$$\sigma_t^2 = w + \sigma_{t-\Delta t}^2(a X_{t-\Delta t}^2 + b).$$

Let op die volgende:

- Dieselfde stogastiese veranderlike X_t wat in $Z(x; \lambda, \kappa)$ gebruik word, dryf ook die GARCH-proses.
- Die tydsinterval Δt , asook al die parameters in die vektor $\theta = (a, b, w, \mu, \lambda, \kappa)'$, is spesifiek vir die gekose tydskaal van die data – in hierdie geval, daaglik (vgl. (2.12)).

Met ander woorde, indien Δt daaglikse data verteenwoordig, dan is die waardes van θ ook spesifiek vir daaglikse data gekalibreer en behoort nie direk op ander tydskale toegepas te word nie.

2.4.4 Kalibrasie van parameters

Gegee 'n vektor van prysopbrengste, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ en parameterruimte, Θ , word 'n optimale parametervektor, $\theta = (a, b, w, \mu, \lambda, \kappa)'$ bepaal deur die logaanneemlikheidsfunksie, $\ell(\theta, \mathbf{y})$, te maksimeer. Die raming word dus verkry deur:

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}_{\theta \in \Theta} \hat{\ell}(\theta, \mathbf{y}),$$

waar $\hat{\ell}(\theta, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \ell_i(\theta, y_i)$, die gesamentlike logaanneemlikheid voorstel en elke indiwiduele term gedefinieer is as:

$$\ell_t(\theta, y_t) = \log(z_2) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{s - \sinh^{-1}(z_3)}{k} \right)^2 + \log(\kappa^2 \sigma_t^2 (1 + z_3^2)) \right).$$

Hier is:

- $z_3 = z_1 + z_2 \frac{y_t - \mu}{\sigma_t}$,
- σ_t die tydafhanklike skaalparameter wat deur 'n GARCH(1,1)-proses gegenereer word:

$$\sigma_t^2 = w + \sigma_{t-\Delta t}^2 (a X_{t-\Delta t}^2 + b).$$

Die aanvangswaardes word gespesifiseer as:

- $y_0 := 0$
- $\sigma_0 := \frac{\hat{w}}{1 - \hat{a} - \hat{b}}.$

Die doel is om uit die uitdrukking:

$$\mathbf{y} = \mu + \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\sinh(k \cdot \mathbf{X} + s) - z_1}{z_2},$$

waar $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, en $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, die onderliggende stogastiese drywers X_i te beraam, sodat die beraamde drywers $\hat{X}_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ is vir alle $i \in [1, n]$.

Die uiteindelijke toets is of:

$$\hat{\mathbf{X}} = \frac{\sinh^{-1}(\hat{z}_2 (\frac{y - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}) + \hat{z}_1) - \hat{\lambda}}{\hat{\kappa}}$$

beraam kan word asof dit uit 'n standaard-normaalverdeling afkomstig is.

Die residue $\hat{\mathbf{X}}$ word aan die volgende drie vereistes getoets:

1. Die residue is normaalverdeel: $\hat{\mathbf{X}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
2. Daar is nie outokorrelasie in $\hat{\mathbf{X}}$ nie.
3. Daar is nie volatilitateitrosvorming in $\hat{\mathbf{X}}$ nie.

2.4.4.1 'n Nota aangaande die opbrengsvektor

Hierdie analise gebruik daaglikse opbrengste van J200T. Soos reeds in die afdeling oor 2.2.2 *Data voorbereiding en* (§2.2.2) verduidelik is, is opbrengste wat oor langer as een dag strek uit die data verwyder. Die resulterende steekproefgrootte vir die aangepaste dataset is $n = 3531$.

Outokorrelasie- en trosvormingstoetse vereis 'n volledige tydreeks sonder gapings. Indien datapunte verwyder word, word belangrike skakels in die outoregressiewe proses verbreek. Indien dit ingesluit word, kan Vrydag-tot-Maandag-opbrengste die illusie van afhanklikheid skep waar daar eintlik geen afhanklikheid is nie.

Die resultate vir beide word daarom gerapporteer:

- die volledige dataset ($n = 4569$),
- die aangepaste stel ($n = 3531$).

Die resultate oor outokorrelasie moet dus met versigtigheid geïnterpreteer word.

2.4.4.2 Toets vir normaliteit van residue

Die volgende hipoteses is geformuleer:

H_0 : Die residue $\hat{X} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

H_1 : Die residue is nie $\mathcal{N}(0,1)$ verdeel nie.

Die Kolmogorov–Smirnov(KS)-toets word aangewend (Kolmogorov 1933; Smirnov 1948). Aangesien die parameters vanuit dieselfde steekproef beraam word waarop die toets uitgevoer word, is die standaard- KS-kritieke waardes nie geldig nie. 'n Skoenlusbenadering word daarom toegepas (Efron 1979; Efron en Tibshirani 1993), waarin die parameters vir elke skoenlusreplika herbereken word.

Met $B = 2000$ skoenlusreplikas en 'n steekproefgrootte van $n = 3531$, is:

- Waargenome KS statistiek: $D = 0.012406$.
- Naïewe 5%- kritieke waarde is $\frac{1.3581}{\sqrt{3531}} \approx 0.02286$.
- Skoenlus-gebaseerde p-waarde: $\hat{p} = 0.1180 (\pm 0.014)$.

By 'n 5%-vlak kan die nulhipotese dus nie verwerp word nie. Die residue kom ooreen met 'n standaard-normaalverdeling.

2.4.4.3 Outokorrelasie en volatilitiestrosvorming

Die Ljung–Box-portmanteau-toets (Ljung en Box 1978), wat gebaseer is op Box en Pierce (1970), word ingespan om lineêre en nie-lineêre afhanklikheid te toets:

- Opbrengste: getoets vir lineêre outokorrelasie,
- Kwadraatopbrengste: getoets vir outoregressiewe voorwaardelike heteroskedastisiteit (Engle 1982).

Aangepaste data ($n = 3531$):*Opbrengste:*

$$Q(10) = 16.629, p = 0.0830$$

$$Q(20) = 22.841, p = 0.2967$$

 $\rightarrow H_0$ nie verwerp nie $\rightarrow$ Geen bespeurde outokorrelasie.*Kwadraatopbrengste:*

$$Q(10) = 6.834, p = 0.5546$$

$$Q(20) = 13.773, p = 0.7438$$

 $\rightarrow H_0$ nie verwerp nie $\rightarrow$ Geen oorblywende ARCH-effekte.**Volledige data ($n = 4569$):***Opbrengste:*

$$Q(10) = 21.327, p = 0.0189$$

$$Q(20) = 33.008, p = 0.0337$$

 $\rightarrow H_0$ verwerp $\rightarrow$ Beduidende outokorrelasie (maar waarskynlik kunsmatig).*Kwadraatopbrengste:*

$$Q(10) = 5.452, p = 0.7084$$

$$Q(20) = 23.929, p = 0.157$$

 $\rightarrow H_0$ nie verwerp nie $\rightarrow$ Geen ARCH-effekte.**2.4.4.4 Samevatting van resultate**

Datastel	n	Normaal-toets (KS)	Outokorrelasie (p) $h = 10 / 20$	ARCH (p) $h = 10 / 20$
Aangepas	3531	$D = 0.0124, p = 0.118$	0.083 / 0.297	0.555 / 0.744
Volledig	4569		0.019 / 0.034	0.708 / 0.157

Die gevolgtrekking is dat die residue aan die eienskappe van 'n standaard-normaalverdeling voldoen, en dat die model effektief die variansiedinamika beskryf. Die geringe outokorrelasie wat in die volledige datastel bespeur is, kan waarskynlik toegeskryf word aan kalendergapings (soos Vrydag-tot-Maandag-opbrengste) en nie aan onderliggende ekonomiese afhanklikheid nie.

3. Bespreking

Die empiriese ontleding toon dat die kurtose van aandeelprysopbrengste afneem met toenemende tydskaal, in dieselfde rigting as wat deur 'n suiwer inligtinggedrewe konteks voorspel word. Nieteenstaande bly die empiriese kurtose oor al die ondersoekte tydskaal wesenlik hoër as die teoretiese kurtose van konteks. Binne die omvang van die beskikbare data is daar geen duidelike aanduiding dat die oortollige kurtose tot nul konvergeer nie. Dit dui daarop dat die verspreidingsgedrag van opbrengste nie volledig met die ideaal van 'n homogene, suiwer inligtingproses versoenbaar is nie, ondanks die normaliserende tendens wat op grond van die sentrale limietstelling verwag sou word onder standaard-aannames.

Hierdie patroon ondersteun die vermoede dat prysopbrengste wél deur konteks gedryf word, maar dat daar 'n addisionele vervorming plaasvind. Daar word voorgestel dat hierdie vervorming ontstaan deur 'n heuristiese meganisme, naamlik hiperboliese omskakeling, wat intree wanneer kwantifiseerbare verskynsels (soos pryse) beraam word op grond van onkwantifiseerbare veranderlikes (soos konteks).

Vir baie kort tydsintervalle, waar onafhanklike nuusbrokkies nog nie genoeg konvolusies ondergaan het om die eienskappe van die normaalverdeling aan te neem nie, is dit moeilik om die effek van hiperboliese omskakeling afsonderlik waar te neem. Maar deur onafhanklike nuusbrokkies kunsmatig te sommeer kan waargeneem word dat teoretiese konteks redelik vinnig normaal begin lyk. Daarom word aangeneem dat, vir daaglikse opbrengste, genoeg konvolusies reeds plaasgevind het om die konteks as feitlik normaalverdeel te beskou. Onder dié omstandighede kan die effek van hiperboliese omskakeling geïsoleer en bestudeer word.

Die model wat ontwikkel is, lewer bemoedigende resultate. Dit is in staat om sowel die verdelingskenmerke van opbrengste as die trosvorming en outoregressiewe dinamika daarvan geloofwaardig te modelleer. Nietemin is daar nog verskeie kwessies wat toekomstige navorsing vereis.

Een so 'n uitdaging is die keuse van datavoorbereiding. Indien kalibrasie op die volledige datastel uitgevoer word, vang dit wel outokorrelasie en heteroskedastisiteit akkuraat vas, maar loop dit die risiko om kunsmatige afhanklikheid in te sluit weens kalendergapings soos naweke en openbare vakansiedae. Andersyds, as die data beperk word tot streng daaglikse opbrengste, word hierdie artefakte verwyder, maar gaan daar moontlik inligting oor die ware dinamika verlore. Aangesien hiperboliese omskakeling 'n nie-lineêre transformasie meebring, is dit nie eenvoudig om hierdie twee weergawes van die data te versoen nie. Dit is 'n belangrike metodologiese oorweging, maar die hantering daarvan lê buite die bestek van hierdie artikel.

Voorts behoort daar ook ondersoek ingestel te word na die algemeenheid van hiperboliese omskakeling in finansiële tydreeks. Die verskynsel van oortollige kurtose is wyd gedokumenteer in die literatuur, en blyk 'n universele eienskap van finansiële markte te wees (Dhesi, Shakeel en Ausloos 2019; Kim en White 2004; Mandelbrot 1963). Hierdie studie is egter beperk tot slegs een indeks (J200T), onder relatief ideale toestande – met voldoende likiditeit en aktiewe handel. Gevalle van lae likiditeit of stagnante pryse is doelbewus uitgesluit om die onderliggende dinamika duidelik te isoleer.

4. Samevatting

Hierdie artikel ondersoek aandeelprysopbrengste vanuit twee ooreenstemmende invalshoeke: 'n teoretiese (epistemiese) model en 'n empiriese toetsing van daardie model teenoor werklike markdata. Die studie begin met die veronderstelling dat aandeelpryse uitsluitlik deur inligting gedryf word en ondersoek dan wat die verwagte statistiese gedrag van opbrengsverdelings onder sodanige aannames behoort te wees.

In die eerste helfte van die artikel word 'n waarskynlikheidsdigtheidsfunksie vir klein inligting-veranderings, oftewel nuusbrokkies, veronderstel en word daar ondersoek hoe opeenvolgende konvolusies van hierdie funksie die verspreiding van opbrengste oor langer tydskale beïnvloed. Die artikel fokus veral op kurtose en vind dat, indien aandeelpryse suiwer deur inligting gedryf word, kurtose oor tyd afneem en uiteindelik na die normaalverdeling konvergeer.

In die tweede deel word teoretiese verwagtinge vir die konteks vergelyk met werklike opbrengsdata van J200T, oor tydskale wat van sekondes tot jare strek. Die empiriese resultate toon wel 'n dalende tendens in kurtose met toenemende tydskaal, in dieselfde rigting as wat die model voorspel, maar die waargenome kurtose bly oor al die ondersoekte tydskale beduidend hoër as die teoretiese kontekstkurtose. Dit dui op 'n aanvullende meganisme wat oortollige kurtose in stand hou.

Daar word voorgestel dat hierdie verskil verklaar kan word deur 'n heuristiese transformasie, naamlik hiperboliese omskakeling, wat plaasvind wanneer markdeelnemers waardes beraam uit onkwantifiseerbare verskynsels. Interpolasie op die waarde-as, eerder as op die definisiegebied van die funksie self, lei tot 'n geometriese verbuiging wat wiskundig as 'n hiperboliese transformasie beskryf kan word. Hierdie verbuiging verhoog die kurtose, selfs wanneer die onderliggende drywer normaalverdeel is.

Die voorgestelde benadering word getoets deur die verloop van kurtose in sowel die model as die data te vergelyk en daar word gevind dat hul afgeleides ooreenstem. Dit dui daarop dat kurtose in beide gevalle in dieselfde fase van verval verkeer. Verder word 'n model toegepas waarin opbrengste deur 'n gestruktureerde transformasie ('n gestandaardiseerde sinh-funksie) voorgestel word, gekombineer met 'n GARCH(1,1)-proses om trosvorming in volatiliteit te modelleer.

Die model lewer geloofwaardige resultate: Die residue is normaalverdeel, sonder noemenswaardige outokorrelasie of heteroskedastisiteit, mits die data vooraf gefiltreer is om kalenderafwykings te verwyder. Tog bly die empiriese kurtose hoër as wat die model voorstel, wat die vermoede versterk dat 'n onderliggende verbuigingsmeganisme bestaan.

Daar word tot die gevolgtrekking gekom dat hiperboliese omskakeling 'n geloofwaardige verklaring bied vir die knaende oortollige kurtose in prysopbrengste en dat dit, in kombinasie met 'n GARCH(1,1)-proses vir volatiliteitsmodellering, 'n omvattende raamwerk vir die beskrywing van opbrengsverdelings verskaf. Verdere navorsing sal nodig wees om die algemene toepasbaarheid van hierdie bevindinge op ander bates, tydperke en markomstandighede te toets.

Bibliografie

- Abramowitz, M. en I.A. Stegun. 1964. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Washington, DC: National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55.
- Bai, X., J.R. Russel en G.C. Tiao. 2003. Kurtosis of GARCH and stochastic volatility models with non-normal innovations. *Journal of Econometrics*, 349–60.
- Barndorff-Nielsen, O.E. 1977. Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, 353(1674):401–19.
- Bates, D.S. 1996. Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in Deutsche Mark options. *The Review of Financial Studies*, 9(1):69–107. <https://doi.org/10.1093/rfs/9.1.69>.
- Bindu, P. en K. Sangita. 2015. Double Lomax distribution and its applications. *Revista Di Statistica Applicata*, LXXV(3).
- Bollerslev, T. 1986. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 302–27.
- . 1987. A conditionally heteroskedastic time series model for speculative prices and rates of return. *The Review of Economics and Statistics*, 69(3):542–47.
- Bouwer, A. en E. Maré. 2025. *Hiperboliese omskakeling*. Hangende tegniese verslag, Universiteit van Pretoria.
- Box, G.E.P. en D.A. Pierce. 1970. Distribution of residual autocorrelations in ARIMA time series models. *Journal of the American Statistical Association*, 65:1509–26.
- Campbell, J.Y., A.W. Lo en A.C. MacKinlay. 1997. *The econometrics of financial markets*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Clark, P.K. 1973. A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices. *Econometrica*, 41(1):135–55.
- Cochrane, J.H. 2005. *Asset pricing*. Hersiene uitgawe. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Cont, R. 2001. Empirical properties of asset returns: Stylized facts and statistical issues. *Quantitative Finance*, 1(2):223–36. <https://doi.org/10.1080/713665670>.
- Dhesi, G., B. Shakeel en M. Ausloos. 2019. Modelling and forecasting the kurtosis and returns distributions of financial markets: Irrational fractional Brownian motion model approach. *Annals of Operations Research*, 1397–1410.
- Duffie, D., J. Pan en K. Singleton. 2000. Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions. *Econometrica*, 68(6):1343–76.

- Durrett, R. 2019. *Probability: Theory and examples*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Eberlein, E. en U. Keller. 1995. Hyperbolic distributions in finance. *Bernoulli*, 1(3):281–99.
- Efron, B. 1979. Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, 7:1–26.
- Efron, B. en R.J. Tibshirani. 1993. *An introduction to the bootstrap*. New York: Chapman & Hall/CRC.
- Embrechts, P., C. Klüppelberg en T. Mikosch. 1997. *Modelling extremal events for insurance and finance*. Berlyn; Heidelberg: Springer.
- Engle, R.F. 1982. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50:987–1007.
- Fama, E.F. 1965. The behavior of stock-market prices. *The Journal of Business*, 38(1):34–105. <https://doi.org/10.1086/294743>.
- . 1970. Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The Journal of Finance*, 25(2):383–417. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1970.tb00518.x>.
- Fama, E.F., L. Fischer, M.C. Jensen en R. Roll. 1969. The adjustment of stock prices to new information. *International Economic Review*, 10.
- Feller, W. 1971. *An introduction to probability theory and its applications*. 2de uitgawe, volume 2. New York: John Wiley & Sons Inc.
- Gabaix, X., P. Gopikrishnan, V. Plerou en H.E. Stanley. 2003. A theory of power-law distributions in financial market fluctuations. *Nature*, 423(6937):267–70.
- Gil-Peláez, J. 1951. Note on the inversion theorem. *Biometrika*, 38(3–4):481–2. <https://doi.org/10.1093/biomet/38.3-4.481>.
- Harrison, J.M. en S.R. Pliska. 1981. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Processes and Their Applications*, 11(3):215–60. [https://doi.org/10.1016/0304-4149\(81\)90039-3](https://doi.org/10.1016/0304-4149(81)90039-3).
- Heston, S.L. 1993. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6:327–43.
- Johnson, N.L. 1949. Systems of frequency curves generated by methods of translation. *Biometrika*, 36(1–2), 149–76. <https://doi.org/10.1093/biomet/36.1-2.149>
- Kim, T.-H. en H. White. 2004. On more robust estimation of skewness and kurtosis: Simulation and application to the S&P500 Index. *Finance Research Letters*, 1:56–73.
- Kolmogorov, A. 1933. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giornale Dell'Istituto Italiano Degli Attuari*, 4:83–91.

- Ljung, G.M. en G.E.P. Box. 1978. On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, 65:297–303.
- Lo, A.W. en A.C. MacKinlay. 1988. Stock market prices do not follow random walks: Evidence from a simple specification test. *The Review of Financial Studies*, 1(1):41–66.
- . 1999. *A non-random walk down Wall Street*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Lomax, K.S. 1954. Business failures: Another example of the analysis of failure data. *Journal of the American Statistical Association*, 49(268):847–52.
- Lux, T. en M. Marchesi. 1999. Scaling and criticality in a stochastic multi-agent model of a financial market. *Nature*, 397(6719):498–500.
- Mandelbrot, B. 1963. The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36:394–419.
- McNeil, A.J., R. Frey en P. Embrechts. 2005. *Quantitative risk management: Concepts, techniques and tools*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Merton, R.C. 1973. Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4:141–83.
- . 1976. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1–2):125–44. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(76\)90022-2](https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90022-2).
- Nelder, J.A. en R. Mead. 1965. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, 7(4):308–13. <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308>.
- Olver, F.W.J., A.B.O. Daalhuis, D.W. Lozier, B.I. Schneider, R.F. Boisvert, C.W. Clark, B.R. Mille, H.S. Cohl en M.A. McClain (reds.). 2025. *NIST Digital Library of Mathematical Functions*. <http://dlmf.nist.gov/>.
- Press, S.J. 1967. A compound events model for security prices. *The Journal of Business*, 40(3):317–35.
- Samuelson, P.A. 1965. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review*, 6(2):41–9.
- Smirnov, N. 1948. Table for estimating the goodness of fit of empirical distributions. *The Annals of Mathematical Statistics*, 19:279–81.
- Weisstein, E.W. 2025. *Leibniz integral rule*. <https://mathworld.wolfram.com/LeibnizIntegralRule.html>.
- Williams, J.B. 1938. *The theory of investment value*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Eindnotas

¹ Vir g_I soos in (2.2) bestaan $\mathbb{E}[X]$ as $b > 2$; $\text{Var}[X]$ as $b > 3$; die derde moment as $b > 4$; en die vierde moment (kurtose) as $b > 5$ (vgl. §A.a).

² Kurtose is slegs eindig vir $b > 5$ (vgl. §A.e). Hier word $b = 6$ (net bo die drumpel) en $b = 15$ (ruim daarbo) gekies om die digtheid te illustreer.

³ <https://www.jse.co.za/jse/instruments/3409>.

⁴ <https://www.jse.co.za/jse/instruments/3408>.

⁵ Refinitiv, *DataScope Select*, <https://select.datascope.refinitiv.com/DataScope/Home>.

⁶ Vir variansie om te bestaan, moet die voorwaarde $(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha^2 < 1$ geld.

Aanhangsel

A. Afleiding van funksies

a. Notasie, definisies en vertakings

Bronne: Vir spesiale funksies word DLMF (Olver e.a., 2025 §§ 2.2, 5.2, 5.5, 5.12, 8.12, 8.19) en Abramowitz en Stegun (1964) gevolg. Vir karakteristieke funksies: Durrett (2020) en Feller (1971).

- **Spesiale funksies**

Gamma-funksie (Euler-integrale definisie). Vir $\Re z > 0$:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Beta-funksie en skakel met Γ . Vir $\Re a > 0$, $\Re b > 0$:

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

'n Standaard-substitusie, $t = \frac{x}{x+1}$, gee vir $\Re a > 0$, $\Re(a+b) > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} dx = B(a, b),$$

en met skaal $c > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+cx)^{a+b}} dx = c^{-a} B(a, b).$$

Boonste onvolledige Gamma. Vir $\Re a > 0$ en $z \notin (-\infty, 0]$ (hooflak):

$$\Gamma(a, z) = \int_z^\infty t^{a-1} e^{-t} dt.$$

Veralgemeende eksponensiële integraal. Vir $\Re z > 0$ (integrale vorm):

$$E_p(z) = \int_1^\infty e^{-zt} t^{-p} dt = z^{p-1} \Gamma(1-p, z).$$

(met analitiese voortsetting via die hoofvertakking van $\Gamma(1-p, z)$).

- **Fourier-konvensies en karakteristieke funksies**

Die volgende word gebruik:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itx}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

en die inverse

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi_X(t) dt.$$

(Die konvolusie-eienskap: $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y$ vir onafhanklike X, Y .)

- **Vertakkings en magte**

Hier word die hooflak van die komplekse logaritme geneem:

$$\text{Log } z = \ln |z| + \text{Arg } z \in (-\pi, \pi], \quad \text{met snylyn } (-\infty, 0].$$

Magte word aldus gedefinieer: $z^\alpha := \exp(\alpha \text{Log } z)$.

Vir $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ en reële b gee dit

$$(it)^b = |t|^b e^{i(\frac{\pi}{2})b} \text{sgn}(t), \quad (-it)^b = |t|^b e^{-i(\frac{\pi}{2})b} \text{sgn}(t).$$

Hierdie keuses word konsekwent in alle Fourier- en Gamma-uitdrukkings gebruik.

b. Digtheid, variansie en standaardisering

Vir $b > 1$ en $d > 0$ word die waarskynlikheidsdigtheidsfunksie (WDF) gedefinieer as 'n wysiging van die dubbele Lomax-verdeling (Bindu en Sangita 2015; Lomax 1954):

$$f(x; b, d) = \frac{b-1}{2} \frac{d^{b-1}}{(d + |x|)^b}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hieruit volg $\int_{\mathbb{R}} f = 1$. Die verdeling is simmetries met mediaan 0. Die gemiddeld bestaan slegs vir $b > 2$; in daardie geval is $\mathbb{E}[X] = 0$.

Die variansie bestaan vir $b > 3$:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] = 2 \cdot \frac{b-1}{2} d^{b-1} \cdot I,$$

waar

$$I := \int_0^\infty \frac{x^2}{(d+x)^b} dx.$$

Die substitusie $u = \frac{x}{d+x}$ (dus $x = \frac{u \cdot d}{1-u}$, $dx = \frac{d}{(1-u)^2} du$, en $d+x = \frac{d}{1-u}$) word uitgevoer:

$$\frac{x^2}{(d+x)^b} dx = \frac{d^2 u^2}{(1-u)^2} \cdot \frac{(1-u)^b}{d^b} \cdot \frac{d}{(1-u)^2} du = d^{3-b} u^2 (1-u)^{b-4} du.$$

Derhalwe:

$$I = d^{3-b} \int_0^1 u^2 (1-u)^{b-4} du = d^{3-b} B(3, b-3) = d^{3-b} \frac{\Gamma(3)\Gamma(b-3)}{\Gamma(b)} = 2d^{3-b} \frac{\Gamma(b-3)}{\Gamma(b)}.$$

Vanuit die rekursiewe Gamma-formule:

$$\Gamma(b) = (b-1)(b-2)(b-3)\Gamma(b-3),$$

en dus,

$$\frac{\Gamma(b-3)}{\Gamma(b)} = \frac{1}{(b-1)(b-2)(b-3)}.$$

Die variansie is dus:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= (b-1)d^{b-1} \cdot 2 d^{3-b} \cdot \frac{1}{(b-1)(b-2)(b-3)} \\ &= \frac{2d^2}{(b-2)(b-3)}. \end{aligned}$$

Laat $\sigma = \sqrt{\text{Var}_f(X)}$ en $Y = \frac{X}{\sigma}$. Die WDF vir Y is:

$$\begin{aligned} g_Y(y; b) &= \sigma \cdot f(\sigma y; b, d) \\ &= \sigma \cdot \frac{b-1}{2} \cdot \frac{d^{b-1}}{\sigma^b \left(\frac{d}{\sigma} + |y|\right)^b} \\ &= \sigma^{1-b} \cdot d^{b-1} \cdot \frac{b-1}{2} (q_b + |y|)^{-b}, \end{aligned}$$

waar $q_b = \frac{d}{\sigma} = \sqrt{\frac{(b-2)(b-3)}{2}}$. Die WDF word nou saamgevat:

$$g_X(x; b) = C_b (q_b + |x|)^{-b},$$

waar $C_b = 2^{-\frac{b-1}{2}} \cdot \frac{b-1}{2} \cdot ((b-2)(b-3))^{\frac{b-1}{2}}$.

c. Afleiding van die karakteristieke funksie

Laat $g(x) = C_b (q + |x|)^{-b}$ (gestandaardiseerde WDF, $b > 1$, $q > 0$). Dan vir $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t; b) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} g(x, b) dx = C_b \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx} + e^{-itx}}{(q + x)^b} dx.$$

Met $u = q + x$ ($dx = du, x \in [0, \infty) \mapsto u \in [q, \infty)$):

$$\varphi_X(t; b) = C_b \left[e^{-iqt} \int_q^{\infty} u^{-b} e^{itu} du + e^{iqt} \int_q^{\infty} u^{-b} e^{-itu} du \right].$$

Die standaard-identiteit (met analitiese voortsetting) vir $\Re z > 0$,

$$\int_q^{\infty} u^{-b} e^{-zu} du = z^{b-1} \Gamma(1-b, zq),$$

gee (kies die hoofak van Log):

$$\varphi_X(t; b) = 2 C_b \Re[e^{-iqt} (-it)^{b-1} \Gamma(1-b, -iqt)],$$

wat eksplisiet reël is (die twee terme is konjugate vir reële t en q).

'n Ekwivalente, dikwels numeries meer stabiele, vorm gebruik die veralgemeende eksponensiële integraal:

$$\varphi_X(t; b) = 2 C_b q^{1-b} \Re[e^{-iqt} E_b(-iqt)].$$

d. n -voudige konvolusies

Laat $X_1, \dots, X_n$ onafhanklik en identies verdeel (o.i.v.) wees met WDF $g(x) = C_b(q + |x|)^{-b}$ en karakteristieke funksie φ_X . Vir $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ geld

$$\varphi_{S_n}(t) = \{\varphi_X(t)\}^n.$$

Met die vooraf-Fourier-konvensies is die digtheid

$$f_{S_n}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \varphi_{S_n}(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(tx) \varphi_{S_n}(t) dt,$$

en die verdelingsfunksie volg uit die Gil-Peláez-formule (Gil-Peláez 1951):

$$F_{S_n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Im \left(\frac{e^{itx} \varphi_{S_n}(t)}{t} \right) dt.$$

Vir die gestandaardiseerde som $Y_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ is

$$\varphi_{S_n}(t) = \left\{ \varphi_X \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right\}^n.$$

In al die bostaande word die hooftak van Log en $\Gamma(1 - b, \cdot)$ (snylyn $(-\infty, 0]$) gebruik.

e. Momente uit die karakteristieke funksie

Laat $g(x) = C_b(q + |x|)^{-b}$ 'n gestandaardiseerde, simmetriese WDF wees met $b > 5$. Die hooftak van Log en $\Gamma(1 - b, \cdot)$ word gebruik. Die KF het dan die geslote vorm:

$$\varphi_X(t; b) = 2 C_b q^{1-b} \Re \{ e^{-iqt} E_b(-iqt) \}, \quad E_b = z^{b-1} \Gamma(1 - b, z).$$

Indien $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$, bestaan $\varphi_X^{(k)}(0)$ en

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k].$$

Afgeleide identiteit vir E_b . Met $E_p'(z) = -E_{p-1}(z)$ volg per induksie

$$E_p^{(k)}(0) = (-1)^k E_{p-k}(0) = (-1)^k \frac{1}{p-k-1},$$

geldig wanneer $\Re(p-k) > 1$, met

$$E_v(0) = \int_1^{\infty} t^{-v} dt = \frac{1}{v-1}.$$

Berekening by $t = 0$. Laat $h(t) = e^{-iqt} E_b(-iqt)$. Deur gebruik te maak van Leibniz (Weisstein 2025) en die kettingreël (waar $z = -iqt$) word verkry:

$$h''(0) = q^2 \left[-\frac{1}{b-1} + \frac{2}{b-2} + \frac{1}{b-3} \right],$$

$$h^{(4)}(0) = q^4 \left[-\frac{1}{b-5} + \frac{4}{b-4} - \frac{6}{b-3} - \frac{4}{b-2} + \frac{1}{b-1} \right].$$

Omdat $h^{(k)}(0)$ hier reël is, volg

$$\varphi_X''(0) = 2 C_b q^{1-b} h''(0),$$

$$\varphi_X^{(4)}(0) = 2 C_b q^{1-b} h^{(4)}(0).$$

Dus:

$$\mathbb{E}[X^2] = -\varphi_X''(0), \quad \mathbb{E}[X^4] = \varphi_X^{(4)}(0).$$

Standaardisering.

Kies

$$q = q_b = \sqrt{\frac{(b-2)(b-3)}{2}}, \quad C_b = 2^{-\frac{b-1}{2}} \cdot \frac{b-1}{2} \cdot ((b-2)(b-3))^{\frac{b-1}{2}},$$

wat $\mathbb{E}[X^2] = 1$ gee. Direkte substitusie lewer dan

$$E[X^4] = \kappa_Y(b) = 6 \frac{(b-2)(b-3)}{(b-4)(b-5)}, \quad b > 5.$$

Som van o.i.v.-waarnemings. Laat $X_1, \dots, X_n$ o.i.v. wees soos X , $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$, en $Y_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ (dus $\text{Var}(Y_n) = 1$). Kumulante is additief vir onafhanklike veranderlikes: $\kappa_k(S_n) = n\kappa_k(X)$. Gevolglik

$$\kappa(Y_n) = 3 + \frac{\kappa_Y(b) - 3}{n} = 3 + \frac{3(b^2 - b - 8)}{n(b-4)(b-5)}.$$