

Die som van 'n reeks opeenvolgende heelgetalle tot 'n vasgestelde mag verhef

Pieta van Deventer

Trefwoorde: Bernoulli-getalle, Bernoulli-koëffisiënte, Bernstein-polinome, analitiese formule, koëffisiënte, Pascal se driehoek, magsom, Bernoulli-Seki-oplossing, Faulhaber

Jare gelede, in 1784 om presies te wees, het 'n gefrustreerde onderwyser 'n verveelde sewejarige leerling 'n probleemopdrag gegee wat hy gereken het die kêreltjie 'n hele rukkie sou besig hou. Groot was sy verbasing toe die jong man sonder verwyf met die antwoord en sy oplossingsmetode vorendag kom. Hoe akkuraat die besonderhede is, is moeilik om te sê, maar die verskillende bronne is verbasend sterk in ooreenstemming met mekaar, alhoewel die ouderdom en sekere ander aspekte wél verskil. Hierdie leerling wat later roem verwerf het as die Duitse wiskundige, Carl Friedrich Gauss (1777–1855), was een van die heel grootstes en volgens sommige die grootste wiskundige van alle tye, selfs groter as Archimedes of Eratosthenes. Die probleem wat hy moes oplos, was om die volgende uitdrukking te vereenvoudig: $1+2+3+\dots+100$. Die jong Gauss het sondermeer gesê dat dit $\frac{50 \times 51}{2}$ is.¹ Dis die moeite werd om die voetnota op te volg en oor hierdie besondere Duitse wiskundige na te lees. Sy argument was eenvoudig, maar dit getuig van 'n besondere insig op so 'n jong ouderdom.

Hy het die getalle in die reeks gepaar, klein met groot soos volg:

$$(1+100)+(2+99)+(3+98)+\dots+(49+52)+(50+51)=101 \times 50 = 5050$$

Hierdie 5050 kan dan ook as $(100+1) \times \frac{100}{2}$ geskryf kan word, of in die algemeen as

$$\frac{n(n+1)}{2}, \text{ wat u natuurlik dadelik as die formule wat u op skool geleer het vir die som van}$$

die reeks $1+2+3+\dots+n$ sal herken. Daar is natuurlik ook die formule vir die som van die kwadrate van die eerste n telgetalle wat redelik algemeen bekend is en ook nie besonder moeilik is om af te lei nie, naamlik:

$$1+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

So ook is die formule vir derdemagte van die eerste n telgetalle wat redelik algemeen bekend is en ook nie besonder moeilik is om af te lei nie, alhoewel die afleiding ietwat omslagtig mag voorkom:

$$\sum_{j=1}^n j^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

¹ https://en.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

Die orde van die formule is uiteindelik altyd een meer as die betrokke deurlopende magsverheffing. Die orde synde die hoogste mag in die uitdrukking. In hierdie gevalle is dit onderskeidelik 3 en 4, naamlik die eksponente in $n \cdot n \cdot 2n = 2n^3$, asook $[n(n+1)]^2$, teenoor die feit dat dit magte van onderskeidelik 2 en 3 is wat bymekaar getel word.

Die formules hiervoor kan ook redelik maklik uit eerste beginsels afgelei word.²

Nou is die verdere logiese vraag natuurlik: Wat is die som van die n terme met elke term tot die m -ste mag verhef, ook genoem die m -ste magsom? Is daar 'n algemene formule om dit mee te bepaal? Daar is wél so 'n formule, maar dit het nie sonder bloedsweet tot lig gekom nie en dis ook nie heeltemal so eenvoudig om dit toe te pas nie. Die direkte afleidings (ja, daar is tans meer as een) van so 'n uitdrukking vir elk van die waardes van $m = 4, 5, 6, \dots$ kan baie lastig wees, om dit sag te stel. Die vraag of 'n algemene analitiese formule daarvoor bestaan, het wiskundiges baie lank, letterlik honderde jare, gefrustreer en dit het op die ou einde besondere insig in wiskundige terme wat op die oog af geen verband met mekaar het nie, vereis. Die oplossing is nie moeilik om toe te pas nie, maar enkele ander minder bekende terme word hiervoor benodig, wat dit effens lastig maak. Dit behels kennis van die sogenaamde Bernoulli-getalle en Bernstein-polinome en *inter alia* Pascal se driehoek – tipes wiskunde wat op die oog af niks op deeske aarde met mekaar uit te waai het nie. Die Bernoulli-getalle byvoorbeeld hou onder andere verband met probleme in hidroulika. Hierdie probleem is deur baie wiskundiges oor verskeie eeue heen aangepak. Mense vanuit die Verre-Ooste, soos Persië, Indië en Japan, sowel as die Westerse lande, soos Duitsland, Switserland en vele andere, het hulle tyd hiermee verwyl. Die finale beslag is deur twee wiskundiges, naamlik die Switser Jacob Bernoulli en die Japanner Seki Takakazu, so te sê gelyktydig en tog onafhanklik van mekaar aan die oplossing gegee.³ Dit is dan ook daarom dat daar deesdae meer dikwels van die Bernoulli-Seki-oplossing gepraat word.⁴ Hulle het uiteindelik onder andere van Pascal se driehoek en die meer algemene Bernstein-polinome gebruik gemaak. Pascal se driehoek is reeds tevore bespreek.⁵ Die Bernstein-polinome word 'n entjie verder in hierdie artikel toegelig. Dit is ook bekend dat 'n Duitse wiskundige Johann Faulhaber (1580–1635) hierdie oplossing gevind het, alhoewel hy onbewus daarvan was dat hy van die sogenaamde Bernoulli-getalle gebruik gemaak het.⁶ Faulhaber se formules verskaf die Bernoulli-getalle (sonder sy skynbare kennis daarvan) op 'n ietwat kunsmatige wyse wat my persoonlik nie aanstaan nie (regte ou snob, nè). Ek verkies om enige formules uit eerste beginsels te kan aflei. Dis tog waaroor dit vir my gaan, naamlik die elegante bymekaarvoeg van die bekende, maar skynbaar irrelevante tot 'n verbasende nuwe resultaat of ontdekking. Later iets meer oor Faulhaber.

² Die direkte afleidings van hierdie formules is nie moeilik nie, maar kan ietwat langdradig wees, maar daar is ook korter afleidings wat 'n bietjie meer insig verg. Een van die korter weergawes volg aan die einde van hierdie artikel vir diegene wat dit graag sou wou opvolg.

³ https://en.wikipedia.org/wiki/Seki_Takakazu

⁴ https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_number

⁵ https://www.litnet.co.za/wp-content/uploads/2020/10/Pascal_se_driehoek_LHopital_se_reel_LL.pdf

⁶ [Bernoulli number - Wikipedia](#)

Die beskrywing van hierdie prosesse gaan waarskynlik vir u na 'n groot gevroetel lyk, maar van nader beskou, en soos dit dikwels in wiskunde die geval is, is dit so dat as u eers die beginsels onder die knie het, die res redelik maklik, werklik resepsgewys, gevolg kan word. Die formule wat na veel vereenvoudiging na vore getree het, is:

$$\sum_{k=1}^n k^m = \frac{1}{m+1} \left(B_0 n^{m+1} + \binom{m+1}{1} B_1^+ n^m + \binom{m+1}{2} B_2 n^{m-1} + \dots + \binom{m+1}{m} B_m n \right)$$

Hierdie formule bevat 'n aantal B_i 's, asook 'n B_i^+ , wat nou die Bernoulli-koëffisiënte is wat ons moet vind. Hiermee is die probleem opgelos. Hierdie B -waardes is dan ook soos u sal sien die basiese probleem wat Faulhaber op sy eie manier benader het. Dit staan ook as die Bernoulli-getalle bekend. Ons weergawe gaan so effens vereenvoudig wees.

Verder is die vraag natuurlik op watter wyse hierdie formule ontstaan het, en dis wat ons gaan probeer aandui.

U is reeds met die kombinasienotasie, wat ook as die kiesnotasie bekend staan, bekend, waar byvoorbeeld:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots 1}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 \cdot (m-n) \cdot (m-n-1) \cdot (m-n-2) \cdots 1}$$

Al hierdie B_i - en B_i^+ -koëffisiënte kan op verskillende maniere gevind word, onder andere as koëffisiënte in die Taylor-reeksuitbreidings van sekere trigonometriesse of hiperboliese funksies, of selfs as waardes wat in die Riemann-Zeta-funksie gevind word. Sommige kan ook uiteindelik deur middel van die koëffisiënte in Pascal se driehoek gevind word. Daar is selfs 'n briljante genererende funksie waaruit al hierdie koëffisiënte bepaal kan word en nog veel meer metodes wat deur die jare ontwikkel is. Hier het die altyd teenwoordige Leonhard Euler (1707–1783) ook sý bydrae gemaak. Ons gaan dit egter kort en kragtig hou. 'n Mens kan slegs bespiegel hoe die wiskundiges die nodige konneksies gemaak het wat u nou gaan waarneem. Ek maak grotendeels van die uiteensetting in Nathaniel Larson se essay gebruik. Om sake te vereenvoudig het ek dit egter ietwat aangepas.⁷ Hiermee wil ek ook beklemtoon dat dit Larson se argument is wat grotendeels gevolg word. Ek het na heelwat pogings van verskeie skrywers gekyk en beskou dit as een van die bestes wat ek al teëgekom het. Ek sou dit self nie beter as Larson kon stel nie. Slegs hier en daar is 'n klein verduidelikende ietsie toegevoeg. Party skrywers gee elegante, kort, kragtige uiteensettings wat op die oog af maklik lyk om te volg, maar as jy dit probeer toepas, is jy gestonk deur die kompleksiteit daarvan, of dit gee slegs 'n resep sonder enige verklaring waar dit vandaan kom. 'n Mens se kop kan dan net woer-woer en ek dink nie hulle wen mense se harte op daardie manier vir die pragtige elegansie van wiskunde nie. Daar is ook een baie kort, maar breinlose uiteensetting wat vir ons geen waarde inhou nie, naamlik slegs 'n resep en niks meer as dit nie. Ons stel nie daarin belang nie. Goed, klaar gefilosofeer. Nou vir die eenvoudiger, alhoewel ietwat meer langdradige uiteensetting.

⁷ Nathaniel Larson, *The Bernoulli numbers: a brief primer*, 10 May 2019.

Pierre de Fermat (1601–1665) het ook probeer om hierdie probleem op te los. Hy het vasgebyt en op empiriese wyse formules vir die berekening van $1^m + \dots + n^m$ vir $m = 1, 2, 3, \dots, 6$ en n heeltallig bepaal. Op daardie stadium was daar geen algemene formule nie en hy wou deur middel van hierdie direkte afleidings 'n patroon probeer vasstel. Dit gaan ons dus ook nou help om die algemene oplossing te vind deur van hierdie ses oplossings af te veralgemeen. Die veralgemening is wel geldig, omdat dit nie te moeilik is om die resultaat se korrektheid in die algemeen deur middel van induksie te bewys nie.⁸ Nou moet ons eers 'n lastigheid ten opsigte van notasie bespreek. Dit lyk logies om vir die som van m -ste magte van 1 tot n die notasie $S_m(n)$ te gebruik. Dit lei egter tot onnodig gekompliseerde vorms van die uitdrukkings soos 'n mens vorder. Gevolglik gebruik ons die notasie $S_m(n-1)$. Die som van n terme elk tot die mag m skryf ons dus as:

$$S_m(n-1) = 1^m + 2^m + \dots + n^m$$

Dit blyk dat vir die magsverheffing van m , ons $m + 1$ terme in ons formule benodig. Dit kom later baie duidelik na vore.

Fermat se formules tot die mag $m = 1, 2, 3, \dots, 6$ sien nou soos volg in tabelvorm vir makliker verdere verduideliking daaruit:

$S_1(n-1) =$	$\frac{1}{2}n^2$	$-\frac{1}{2}n$			
$S_2(n-1) =$	$\frac{1}{3}n^3$	$-\frac{1}{2}n^2$	$+\frac{1}{6}n$		
$S_3(n-1) =$	$\frac{1}{4}n^4$	$-\frac{1}{2}n^3$	$+\frac{1}{4}n^2$		
$S_4(n-1) =$	$\frac{1}{5}n^5$	$-\frac{1}{2}n^4$	$+\frac{1}{3}n^3$	$-\frac{1}{30}n$	
$S_5(n-1) =$	$\frac{1}{6}n^6$	$-\frac{1}{2}n^5$	$+\frac{5}{12}n^4$	$-\frac{1}{12}n^2$	
$S_6(n-1) =$	$\frac{1}{7}n^7$	$-\frac{1}{2}n^6$	$+\frac{1}{2}n^5$	$-\frac{1}{6}n^3$	$+\frac{1}{42}n$

Dis onmiddellik duidelik dat elke formule met 'n term van die vorm $\frac{1}{m+1}n^{m+1}$ begin. Die eerste stap is nou om die $\frac{1}{m+1}$ -faktor gemeenskaplik uit elke formule te faktoriseer. Die formules lyk dan soos volg:

$S_1(n-1) =$	$\frac{1}{2}[n^2$	$-n]$			
$S_2(n-1) =$	$\frac{1}{3}[n^3$	$-\frac{3}{2}n^2$	$+\frac{1}{2}n]$		

⁸ 'n Goeie oefening vir u wanneer u hierdie essay kafgedraf het.

$S_3(n-1) =$	$\frac{1}{4}[n^4$	$-2n^3$	$+n^2]$		
$S_4(n-1) =$	$\frac{1}{5}[n^5$	$-\frac{5}{2}n^4$	$+\frac{5}{3}n^3$	$-\frac{1}{6}n]$	
$S_5(n-1) =$	$\frac{1}{6}[n^6$	$-3n^5$	$+\frac{5}{2}n^4$	$-\frac{1}{2}n^3]$	
$S_6(n-1) =$	$\frac{1}{7}[n^7$	$-\frac{7}{2}n^6$	$+\frac{7}{2}n^5$	$-\frac{7}{6}n^4$	$+\frac{1}{6}n^3]$

Die volgende stappe is waar die wiskundiges se insig 'n mens verstom. Hulle het waargeneem:

- dat die eerste koëffisiënte (leading coefficients) binne die hakies 1 is, wat niks snaaks is nie, maar in die volgende konteks vorm dit deel van 'n omvattende insig;
- dat die tweede koëffisiënte binne die hakies veelvoude van $\frac{-1}{2}$ is, naamlik:

$$2 \cdot \frac{-1}{2} = -1; 3 \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{3}{2}; 4 \cdot \frac{-1}{2} = -2; 5 \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{5}{2}; 6 \cdot \frac{-1}{2} = -3; 7 \cdot \frac{-1}{2} = -\frac{7}{2}$$

- dat die derde koëffisiënte binne die hakies veelvoude van $\frac{1}{6}$ is, naamlik:

$$3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}; 6 \cdot \frac{1}{6} = 1; 10 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}; 15 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{2}; 21 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

- dat die vierde koëffisiënte binne die hakies veelvoude van $-\frac{1}{30}$ is, naamlik:

$$5 \cdot \frac{-1}{30} = \frac{-1}{6}; 15 \cdot \frac{-1}{30} = \frac{-1}{2}; 35 \cdot \frac{-1}{30} = \frac{-7}{6}$$

- dat die vyfde koëffisiënte binne die hakies veelvoude van $\frac{1}{42}$ is, naamlik:

$$7 \cdot \frac{1}{42} = \frac{1}{6}$$

Nou is die vraag natuurlik waar die rye getalle (vermenigvuldigers) 1, dan 2, 3, 4, 5, 6, 7 met samelopende minustekens, dan 3, 6, 10, 15, 21, dan 5, 15, 35 met plustekens, dan 7 ensovoorts vandaan kom. Dit was sekerlik nie so moeilik om hierdie getalle as kombinasieresultate te herken nie. Wat wel beïndruk, is dat hierdie koëffisiënte in konteks in 'n patroon herken is met sekere van hulle deur nulle onderdruk, soos in die volgende tabel van die formules uiteengesit. Voordat ons na die rede vir die nulle soek, laat ons dan nou eers die vorige tabel soos volg herskryf met die *nulle ingevoeg* (berekeningskolomme 4 en 6), gevolg deur 'n netjiese uiteensetting van die ses afleidings:

$S_1(n-1) =$	$\frac{1}{2} \left[\binom{2}{0} \cdot 1 \cdot n^2 - \binom{2}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot n \right]$					
$S_2(n-1) =$	$\frac{1}{3} \left[\binom{3}{0} \cdot 1 \cdot n^3 - \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot n^2 + \binom{3}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot n \right]$					
$S_3(n-1) =$	$\frac{1}{4} \left[\binom{4}{0} \cdot 1 \cdot n^4 - \binom{4}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot n^3 + \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot n^2 + \binom{4}{3} \cdot 0 \cdot n \right]$					
$S_4(n-1) =$	$\frac{1}{5} \left[\binom{5}{0} \cdot 1 \cdot n^5 - \binom{5}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot n^4 + \binom{5}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot n^3 + \binom{5}{3} \cdot 0 \cdot n^2 - \binom{5}{4} \cdot \frac{1}{30} \cdot n \right]$					
$S_5(n-1) =$	$\frac{1}{6} \left[\binom{6}{0} \cdot 1 \cdot n^6 - \binom{6}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot n^5 + \binom{6}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot n^4 + \binom{6}{3} \cdot 0 \cdot n^3 - \binom{6}{4} \cdot \frac{1}{30} \cdot n^2 + \binom{6}{5} \cdot 0 \cdot n \right]$					
$S_6(n-1) =$	$\frac{1}{7} \left[\binom{7}{0} \cdot 1 \cdot n^7 - \binom{7}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot n^6 + \binom{7}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot n^5 + \binom{7}{3} \cdot 0 \cdot n^4 - \binom{7}{4} \cdot \frac{1}{30} \cdot n^3 + \binom{7}{5} \cdot 0 \cdot n^2 \right]$					
					Vervolg ...	$+ \binom{7}{6} \cdot \frac{1}{42} \cdot n \left]$

Let op dat die 0-koëffisiënte 'n merkwaardige deel uitmaak van die interpretasie van die patroon. Dit is sekerlik een van die mees uitsonderlike waarnemings wat gemaak is. Nou lyk die ses afleidings van Fermat in standaardformule-formaat, na vereenvoudiging soos volg:

$$\begin{aligned}
 S_1(n-1) &= \frac{1}{2} \left[\binom{2}{0} n^2 - \binom{2}{1} \frac{1}{2} n \right] \\
 S_2(n-1) &= \frac{1}{3} \left[\binom{3}{0} n^3 - \binom{3}{1} \frac{1}{2} n^2 + \binom{3}{2} \frac{1}{6} n \right] \\
 S_3(n-1) &= \frac{1}{4} \left[\binom{4}{0} n^4 - \binom{4}{1} \frac{1}{2} n^3 + \binom{4}{2} \frac{1}{6} n^2 + \binom{4}{3} 0n \right] \\
 S_4(n-1) &= \frac{1}{5} \left[\binom{5}{0} n^5 - \binom{5}{1} \frac{1}{2} n^4 + \binom{5}{2} \frac{1}{6} n^3 + \binom{5}{3} 0n^2 - \binom{5}{4} \frac{1}{30} n \right] \\
 S_5(n-1) &= \frac{1}{6} \left[\binom{6}{0} n^6 - \binom{6}{1} \frac{1}{2} n^5 + \binom{6}{2} \frac{1}{6} n^4 + \binom{6}{3} 0n^3 - \binom{6}{4} \frac{1}{30} n^2 + \binom{6}{5} 0n \right] \\
 S_6(n-1) &= \frac{1}{7} \left[\binom{7}{0} n^7 - \binom{7}{1} \frac{1}{2} n^6 + \binom{7}{2} \frac{1}{6} n^5 + \binom{7}{3} 0n^4 - \binom{7}{4} \frac{1}{30} n^3 + \binom{7}{5} 0n^2 + \binom{7}{6} \frac{1}{42} n \right] \\
 &= \frac{1}{7} \left[1 \cdot n^7 - 7 \cdot \frac{1}{2} n^6 + 21 \cdot \frac{1}{6} n^5 + 35 \cdot 0n^4 - 35 \cdot \frac{1}{30} n^3 + 21 \cdot 0n^2 + 7 \cdot \frac{1}{42} n \right] \\
 &= \frac{1}{7} \cdot n^7 - \frac{1}{2} n^6 + \frac{1}{2} n^5 - \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{42} n.
 \end{aligned}$$

Die volgende formule lei nou tot ons antwoord deur slegs van Pascal se driehoek en 'n aantal raaiselagtige B -waardes gebruik te maak. Dit is 'n opsomming van voorgaande formules as ons net die B 's kan interpreteer, naamlik:

$$S_m(n-1) = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} B_j n^{m-j+1}$$

Dis hier waar die Bernoulli-getalle wat aan Pascal se driehoek gekoppel is, ter sprake kom. Pascal se driehoek word deur die koëffisiënte in die uitbreiding van die uitdrukking $(a+b)^m$ gevorm, waar:

$$\begin{aligned} (a+b)^m &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} a^i b^{m-i} \\ &= \binom{m}{0} a^0 b^m + \binom{m}{1} a^1 b^{m-1} + \binom{m}{2} a^2 b^{m-2} \dots \binom{m}{m-1} a^{m-1} b^{m-(m-1)} + \binom{m}{m} a^m b^0 \end{aligned}$$

Die koëffisiënte van die individuele terme neem dan die volgende vorm vir die verskillende waardes van m aan:

$m = 1$							1		1						
$m = 2$						1		2		1					
$m = 3$					1		3		3		1				
$m = 4$				1		4		6		4		1			
$m = 5$			1		5		10		10		5		1		
$m = 6$		1		6		15		20		15		6		1	
$m = 7$	1		7		21		35		35		21		7		1
$m = 8$															

Dis duidelik waar die meeste van die koëffisiënte in ons "tabelle" hierbo vandaan kom, maar wat nou van die waardes wat oorgeslaan is? Dit word deur die vreemde B -waardes bepaal wat nou bereken moet word. As hierdie B -waardes nie so onvoorspelbaar was nie, het Pascal se driehoek vir ons die antwoord gegee, maar nou val sommige van Pascal se waardes weg en ander kere is hulle selfs negatief. Dis lastig om te bereken en daar word gewoonlik van 'n tabel, waarvan daar ook meer as een variasie bestaan, gebruik gemaak. Ons wil egter weet hoe dit vasgestel kan word. Die berekening daarvan is baie elegant/interessant en is onder andere deur niemand minder nie as die alomteenwoordige wiskundige, die heer Euler, uitgevind. Ons gaan egter die makliker weg volg, naamlik dié van Faulhaber.

Soos reeds gesê, deur slegs van Pascal se driehoek gebruik te maak, kom ons amper daar. Sommige terme verdwyn egter as gevolg van sekere nulle. Daarenteen bly ander terme behoue danksy versweë ene. Die vraag is nou wanneer 'n term behou word en wanneer dit moet verdwyn. Dit is nou die Bernoulli-getalle wat ons hiermee gaan help. Al wat ons nou nog moet weet, is wanneer dit 'n nul is en wanneer dit 'n een is en as dit 'n een is, wanneer

dit positief en wanneer dit negatief is. Weer eens is daar meer as een reël hoe om dit vas te stel. Voordat enkele van hierdie reëls gestel word, kyk ons eers na 'n formule waarmee hierdie sogenaamde Bernoulli-getalle verkry kan word. Dit is dan ook logies dat Bernoulli onder andere 'n hand hierin gehad het. Dit is ook so dat Takakazu net so 'n groot aandeel hierin gehad het. Die sogenaamde Bernoulli-koëffisiënte word eers gedefinieer en daarna die voortbringende Bernoulli-polinome, wat die Bernoulli-koëffisiënte wat ons soek, verskaf, naamlik met behulp van die voortbringende funksies:

$$\frac{t^n}{(e^t - 1)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B_k^{(n)} \text{ met}$$

$$e^{xt} \cdot \frac{t^n}{(e^t - 1)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B_k^{(n)}(x)$$

Waarvoor staan die B 's? Hierdie vergelykings staan bekend as die Bernstein-polinome.

Laat $x=0$ en dit volg per definisie direk dat $B_k^{(n)}(0) = B_k^{(n)}$. Beskou die geval $n=1$, dan praat ons van die eerste orde Bernoulli-getalle en -polinome. Die twee uitdrukkings hierbo word dan:

$$\frac{t}{(e^t - 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B_k^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A_k, \text{ dws } A_k = B_k^{(1)} = B_k(0) \text{ met}$$

$$e^{xt} \cdot \frac{t}{(e^t - 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B_k^{(1)}(x), \text{ as ons voorlopig vir } x \text{ as onbekende behou.}$$

Nou wil ons eers die waardes van A_k wat uit die voorlaaste uitdrukking spruit, bepaal.

Hiervoor word die uitdrukking dwarsdeur deur $e^t - 1$ vermenigvuldig en Taylor se reeksontwikkeling daarop toegepas. Die B_k volg dan direk hieruit.

Goed, dis pragtige wiskunde, maar heeltemal te lastig vir my. Kom ons kyk na 'n baie makliker benadering, naamlik dié van Faulhaber. Let op dat die basiese ontwikkeling neergeskryf word en die tersaaklike B -waardes gevind moet word. Dis waar Faulhaber in die prentjie kom.

Daar is 'n heel aanskoulike video op YouTube wat Faulhaber se benadering in besonderhede uiteensit,⁹ wat ek nou hier net so oorgeneem het en volg. Die skrywer erken dus dat hierdie nie sy eie werk is nie. Dit is dus nie die skrywer se ontwikkeling nie. Kyk gerus na die video, want dit word voortgesit met verdere verduidelikings as u geïnteresseerd sou wees.

Beskou die definisie wat soos volg rekursief toegepas word:

⁹ <https://www.youtube.com/watch?v=83NFR7JDlww>

Faulhaber het 'n manier ontwikkel om die Bernoulli-getalle maklik te bereken sonder dat hy kennis gedra het van die Bernoulli-getalle. Die geskiedenis van hierdie formule is 'n mooi storie op sy eie en mag ook nog sy weg na LitNet vind.

Die formule is relatief eenvoudig en kom van die volgende uitdrukking af:

$$1^{k-1} + 2^{k-1} + 3^{k-1} + \dots + n^{k-1} = \frac{1}{k}(n+B)^k - B^k$$

Dis nie duidelik waar Faulhaber aan hierdie uitdrukking gekom het nie, maar hierdie soort van polinome was onder andere sy speelveld. By 'n latere geleentheid sal ons dit navors. Baie van die ou wiskundiges het ontwikkelings soms sonder 'n sogenaamde goeie rede daargestel en dan het iemand wel 'n toepassing daarvoor gekry. Groepteorie is 'n prima voorbeeld van so 'n "nuttelose" stuk ontwikkeling en vandag kan 'n mens amper sê die hele veld van algebra berus daarop.

Definieer nou:

$$B_0 = 1, \text{ en}$$

$$B_k = B_k \text{ vir } k \leq 1$$

$$= (B-1)^k = B^k \text{ for } k > 1$$

Ons wil die B 's bereken, beginnende by $k = 2$:

$$(B-1)^2 = B^2$$

$$\therefore 2B^1 + 1 = 0$$

$$\therefore B^1 = -\frac{1}{2} = B_1$$

Nou vir B_2 :

$$(B-1)^3 = B^3$$

$$\therefore -3B^2 + 3B^1 - 1 = 0$$

$$\therefore -3B^2 = 1 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} = B_2$$

$$\therefore B_2 = -\frac{1}{6} \text{ ensovoorts}$$

Op hierdie manier kry ons die Bernoulli-getalle

$$B_3 = 0; B_4 = -\frac{1}{30}; B_5 = 0; B_6 = \frac{1}{42}; B_7 = 0; B_8 = -\frac{1}{30} \text{ ensovoorts.}$$

Hierdie getalle is juis dié wat ons in ons vroeëre ontwikkeling gesien het.

Indien u dus 'n som van 'n reeks magte wil neerskryf, begin met die basiese uiteensetting, bepaal die betrokke B -waardes, plak dit in en siedaar – 'n meesterstuk van ou elegansie. As

die aantal terme baie is en die eksponent groot, bly die lastige deel maar net om met groot geduld al die B 's met behulp van Faulhaber se formule te gaan bereken.