

# **Hiperboliese omskakeling. 'n Gedagte-eksperiment – met afleiding en evaluasie van 'n beskrywende hiperboliese verdeling – wat die bestaan van 'n sistematiese heuristiese denkfout tydens menslike skattings van niedirek meetbare eienskappe aantoon**

**Abie Bouwer en Eben Maré**

---

Abie Bouwer, onafhanklike navorser, en  
Eben Maré, medeprofessor, Wiskunde en Toegepaste Wiskunde, Universiteit van Pretoria

---

## ***Opsomming***

In hierdie artikel ondersoek ons die heuristiese prosesse wat mense gebruik wanneer hulle normaal verdeelde meetbare eienskappe van niedirek meetbare verskynsels skat. Deur 'n analise van Galton se eksperiment, waarin deelnemers die gewig van die vleis van 'n os moes skat, demonstreer ons hoe hierdie skattings deur 'n voorspelbare heuristiek beïnvloed word.

Ons voer aan dat hoewel die gewig van die vleis meetbaar is, die lewende os self uitdagings vir direkte meting bied. Hierdie studie bied 'n kwantitatiewe benadering tot die identifisering van die heuristiek wat in sulke skattings teenwoordig is.

Ons toon aan dat die latente aard van die definisieversameling van die funksie tot interpolasies tussen elemente van die waardeversameling lei. Wanneer die definisieversameling gesien word as 'n subjektiewe beoordeling van soortgelykheid tussen instansies van die klas, lei voorspellings tot kenmerkende en voorspelbare denkfoute wat deur 'n hiperboliese funksie gemodelleer kan word.

Ons stel 'n geometriese benadering voor. Dit lei ons analise na 'n geskikte waarskynlikheidsverdeling, wat ons vervolgens teen die Galton-data toets. Die resultate toon aan dat ons verdelingsfunksie die eiesoortige verdeling van die data bevredigend pas.

**Trefwoorde:** funksionele-kromme-interpolasie; hiperboliese omskakeling; kurtose; latente definisieversameling; onmeetbare verskynsel; skattingsheuristiek; verdelingstransformasie; waardeversamelinginterpolasie

## Abstract

**Hyperbolic transformation. A thought experiment that derives and evaluates a descriptive hyperbolic distribution and reveals systematic heuristic bias in human estimation of non-directly measurable attributes**

We investigate the potential existence of a heuristic in scenarios where a normally distributed measurable property is estimated based on an immeasurable phenomenon. Our analysis draws on the well-known Galton experiment (Galton 1907), in which 787 participants attempted to estimate the weight of dressed meat from a living ox during an agricultural exhibition. In this context, while the weight of the dressed meat is quantifiable, the living ox itself presents challenges for direct measurement. We contend that the distribution of these estimates will not conform to a normal distribution, but will instead undergo a predictable transformation. The hyperbolic sine function serves as an appropriate mechanism for executing this transformation.

We take a geometric baseline and let  $Y$  denote the population random variable for the weight of dressed meat from an ox, with  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . For an ox with observed weight  $y_i$ , we define the standardised index (z-score)  $x_i = \frac{y_i - \mu}{\sigma}$ , so that over the population  $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ . The affine back-transformation to the measurement scale is  $f(x) = \mu + \sigma x$ , hence  $y_i = f(x_i)$ . In this framework,  $\mu$  and  $\sigma$  are the population mean and standard deviation and  $x_i$  is a numerical index (a relative position in the distribution), not the ox itself.

Because the ox itself is not a numerical object, the observer estimates the target weight by anchoring to remembered oxen with known weights. We define  $\mathcal{Y} = \{(o_i, y_i)\}_{i=1}^n$  be ordered so that  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ . Next, we suppose the new ox,  $o_s$ , (not in  $\mathcal{Y}$ ), is judged to lie between two remembered oxen,  $o_r$  and  $o_t$  with  $r < t$ . Let the in-between index be  $s \in [r, t]$  and define the fractional position  $\phi = \frac{s-r}{t-r} \in [0,1]$ . Since the observer has no access to  $x_r, x_s$  or  $\sigma$ , the estimate is made on the value axis by linear interpolation:

$$\hat{y}_s = y_r + \phi(y_t - y_r),$$

which ensures  $y_r \leq \hat{y}_s \leq y_t$ .

Under the linear baseline,  $f(x) = \mu + \sigma x$ , the arc length between  $(a, f(a))$ , and  $(b, f(b))$  is  $\mathcal{L}(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \sqrt{1 + \sigma^2}(b - a)$ , giving the exact calibration  $f(b) - f(a) = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \mathcal{L}(a, b)$ . In practice the observer has no access to  $x$ -values, so the estimate is made on the value axis. To capture possible miscalibration of the horizontal step, we rewrite the local first-order update as  $\hat{y}_s = y_r + \delta \hat{f}'(x_s)$  with  $\delta := \hat{x}_s - x_r$ , and tie the slope to arc length via  $\hat{f}'(\hat{x}_s) = \kappa \int_{x_r}^{\hat{x}_s} \sqrt{1 + (f'(u))^2} du$ , where  $\kappa = \frac{\sigma}{\delta \sqrt{1 + \sigma^2}}$ .

With  $x_r$  fixed, differentiating to  $\hat{x}_s$  gives  $z'(\hat{x}_s) = \kappa\sqrt{1 + z(\hat{x}_s)^2}$  where  $z(x) := \hat{f}'(x)$ . Separating variables and integrating yields  $\operatorname{asinh}(z(x)) = \kappa x + \lambda$ , hence  $\hat{f}'(x) = \sinh(\kappa x + \lambda)$ .

A first-order step then gives  $\hat{y}_s = y_r + \delta \sinh(\kappa \hat{x}_s + \lambda)$ . To retain the interpretation of  $\mu$  and  $\sigma$ , we centre and scale  $\sinh(\kappa X + \lambda)$  for  $X \sim \mathcal{N}(0,1)$  with  $z_1 = \mathbb{E}[\cdot]$  and  $z_2 = \sqrt{\operatorname{Var}[\cdot]}$ . We set  $z_i^* = (\sinh(\kappa x_i + \lambda) - z_1)/z_2$ , and define the estimator  $\hat{f}(x_i) = \mu^* + \sigma^* z_i^*$ .

We construct a cumulative density function and probability density function from this expression, along with a log-likelihood function. We fit the parameters  $\theta = (\mu, \sigma, \lambda, \kappa)'$  to the data using the log-likelihood function and assess the fit of the new distribution against the data using the Kolmogorov-Smirnov test. Our findings indicate that the new distribution aligns well with the data.

**Keywords:** distribution transformation; estimation heuristic; functional-curve interpolation; hyperbolic transformation; kurtosis; latent domain; unmeasurable phenomenon; value-set interpolation

## 1. Inleiding

In sy artikel “Vox Populi” (Galton 1907) bespreek Francis Galton ’n voorval rakende lootjies wat by ’n landbouskou verkoop is. Deelnemers aan die lotery het ’n os gesien en hulle moes skat hoeveel vleis daaruit geslag sou word. Daar was 787 geldige raaiskote. Benewens die bekende bevinding van die “wysheid van die skare”, naamlik dat die mediaanskating naby die werklike gewig was (Wallis 2014), fokus die essensie van die bespreking egter op die eienskappe van die verdeling van die raaiskote, wat vir die skrywer onverwags was. Die verdeling was nie normaal nie, maar negatief skeef, met oortollige kurtose. Vir die normaalverdeling is die skeefheid 0 en die kurtose 3 (oortollige kurtose 0). Uit ons eie metings<sup>1</sup> het ons ’n skeefheidskoeffisiënt van  $\mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3\right] \approx -0,4$  en ’n kurtosekoeffisiënt van  $\mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4\right] \approx 6,0$  verkry. Dit dui aan dat die verdeling nie simmetries was nie (daar was relatief meer lae skattings as hoë skattings); en skattings wat ver van die gemiddeld af was (hoë en lae skattings), het meer gereeld voorgekom as wat verwag sou word indien die verdeling normaal was.

Galton se eksperiment voldoen waarskynlik nie volledig aan die onderliggende aannames van die klassieke<sup>2</sup> sentraallimietstelling nie. Die uiteindelijke verdeling kan deur minstens twee faktore beïnvloed wees:

- i. Die sentraallimietstelling vereis dat skattings uit identiese verdelings verkry word, dus dat elke deelnemer se skatting uit dieselfde verdeling kom; in die praktyk is daar waarskynlik heterogeniteit.
- ii. Die sentraallimietstelling vereis dat raaiskote onafhanklik van mekaar moet geskied. In hierdie geval is raaiskote heel moontlik deur sosiale invloed gekorreleer.

Hoewel uitbreidings van die sentraallimietstelling onder seker omstandighede wel hierdie reëls effe verwater (Feller 1971), val 'n volledige debat buite die bestek van hierdie artikel, en ons berus ons dat die verwagting dat deelnemers se raaiskote normaalverdeel behoort te wees, op sigself nie voor die hand liggend is nie.

Sedertdien het dit begin blyk dat die eiesoortige statistiese verdeling wat deur Galton genoem is, nie uniek is nie. Talle studies, byvoorbeeld Almaatouq e.a. (2022), wat soortgelyke gevalle bestudeer, rapporteer verdelings met dieselfde kenmerkende eienskappe. Alhoewel daar na positiewe skeefverdelings verwys word, blyk dit uit 'n analise van 'n grootskaalse internet-studie (Simoiu e.a. 2019) dat beide positief-skeef en negatief-skeef verdelings voorkom.

Sommige studies fokus op beter passing van die onderliggende verdeling (vgl. Wallis 2014; Rubio 2017) sonder om die voorgestelde vorme eksplisiet aan 'n fisiese meganisme of besluitnemingsmodel te koppel. Wallis meld 'n goeie passing met 'n asimmetriese Student-t (AST), maar publiseer nie die parametrisering nie; die analitiese vorm word wel deur Zhu en Galbraith (2010) beskryf. Rubio bespreek drie t-gebaseerde families: die dubbele twee-deel (DTP)-t, die twee-deel-skaal (TPSC)-t en die twee-deel-vorm (TPSH)-t. DTP kalibreer die linker- en regterhelfte met gemeenskaplike ligging, en individuele skaal en vorm vir die twee helftes (5 parameters); TPSC deel 'n gemeenskaplike skaal; TPSH deel 'n gemeenskaplike vorm. Wanneer die linker- en regterparameters saamval, reduceer hierdie families tot die simmetriese Student-t; terselfdertyd is AST/TPSC/TPSH spesiale gevalle binne DTP.

Aangesien nóg Wallis nóg Rubio volledige parameters verskaf, pas ons self DTP-t vir vergelykingsdoeleindes. Benewens DTP-t gebruik ons ook twee normaal verdeelde verwysingspassings – Galton en Pearson – met gemiddeld en standaardafwyking soos deur Wallis gerapporteer. Hoewel verdelings soos DTP/AST dikwels uitstekende passing lewer, is ons standpunt dat blote beskrywende passing min lig op die onderliggende kognitiewe dinamika werp; ons benadering poog juis om dié dinamika ('n sistematiese heuristiek) eksplisiet te modelleer. Hierdie interpretasie resoneer met die kognitiewe-vooroordeel-literatuur (bv. Montibeller en Von Winterfeldt 2015), en Galton (1907) self stel voor dat die afwyking sielkundig van aard kan wees.

Die uitgangspunt van hierdie studie is om eiesoortige verdeling van die skattings uit Galton se eksperiment aan 'n sistematiese denkfout toe te skryf. Ons beskryf die denkfout en toon aan hoe dit tot die eiesoortige verdeling lei.

## 2. Metode van ondersoek

### 2.1 Databron

Galton (1907) het nie sy data self gepubliseer nie. Ons het 'n weergawe van die data van 'n sekondêre bron bekom (Rubio 2017). Ons bereken die gemiddeld en standaardafwyking (afgerond tot twee desimale plekke) as 1196,71 en 73,59 onderskeidelik. Wallis (2014) berig dat Pearson die gemiddeld en standaardafwyking onderskeidelik as 1197 en 61,895 bereken het. Alhoewel die gemiddelde waarde ooreenstem, verskil die standaardafwykings aansienlik. Die persentiele van ons databron stem egter uitstekend ooreen met 'n tabel van persentiele wat Galton verstrek het. Indien ons nie die standaardafwyking vanuit die brondata bereken

nie, maar eerder die persentiele pas deur middel van 'n minimeringsalgoritme, verkry ons 'n gemiddeld en standaardafwyking van onderskeidelik 1197,21 en 62,18. Vermoedelik het Pearson sy waardes op soortgelyke wyse bepaal. Ons neem dus voorts aan dat ons databron die korrekte data bevat.

Tabel 1 toon 'n opsomming van die datastel, terwyl Figuur 1 'n histogram van die datastel weergee.

**Tabel 1. Statistiese samevatting van die datastel**

|                    |          |
|--------------------|----------|
| Waarnemings        | 787      |
| Gemiddeld          | 1 196,71 |
| Mediaan            | 1 208    |
| Standaard afwyking | 73,59    |
| Skeefheid          | -0,41    |
| Kurtose            | 6,00     |
| Minimum skatting   | 896      |
| Maksimum skatting  | 1 516    |

## **2.2 Benadering**

Ons benadering is van geometriese aard. Ons maak die argument dat indien die gewig van die vleis normaal verdeel is, die interpolasies tussen elemente van die waardeversameling proporsioneel ekwivalent is aan die interpolasies op die funksionele kromme. Ons gebruik die booglengteformule om aan te dui dat interpolasies op die funksionele kromme lei tot 'n hiperboliese verbuiging van die normaalverdeling.

## **2.3 Kognitiewe model**

Die gedagte-eksperiment behels (1) 'n kandidaat wat (2) 'n instansie van (3) 'n klas oorweeg. Die kandidaat skat een van die (4) kwantifiseerbare eienskappe van die klas. Ons neem aan dat die bepaalde eienskap normaal verdeel is. Die kandidaat is bekend met die klas in die sin dat hy al vantevore met instansies van die klas te make gehad het, en die kandidaat is bekend met die waardes van die eienskap met betrekking tot ander instansies van die klas.

Meer konkreet, met betrekking tot die Galton eksperiment, laat ons een van die deelnemers ("kandidaat") van nader beskou: Die kandidaat sien die os ("instansie van die klas") en word gevra om die gewig van die vleis wat uit die os geslag gaan word ("kwantifiseerbare eienskap"), te skat. Die kandidaat verstaan dat osse ("klas") oor hierdie eienskap beskik en het al tevore met ander osse te make gehad en is bekend met die gewig van die vleis wat uit die ander osse geslag was.

Ons analyse ondersoek die reperkussies van 'n bepaalde algoritme wat potensieel deur die kandidaat ingespan kan word om die kwantifiseerbare eienskap te skat. Die stappe van die algoritme verloop soos volg:

1. Die kandidaat onderneem 'n proses van dimensievermindering om al die faktore wat potensieel kan bydra tot die waarde van die kwantifiseerbare eienskap na 'n enkele veranderlike te verminder. Dit is bekend dat dimensievermindering wel plaasvind en dat die brein oor die vermoë beskik om so 'n proses effektief uit te voer (Zvi en Bergman 2008). Op interne vlak beskik die kandidaat oor 'n versameling van verskynsel-en-waarde-pare waar elke instansie van die klas (waarmee die kandidaat al te doen gehad het) met 'n waarde vereenselwig word. Uit die werk van Tversky en Kahneman (1974) blyk dit uit eksperimentele analise dat mense wel oor “ankerwaardes” beskik, wat versoenbaar is met die idee dat interne instansie-en-waarde-pare bestaan. Ons neem aan dat die kandidaat die versameling in volgorde van waarde rangskik.
2. Aangesien die kandidaat al voorheen met voorbeelde van die klas te doen gehad het en bekend is met die waardes van die spesifieke eienskap van die ander voorbeelde, neem ons aan dat die kandidaat oor 'n begrip van die verspreiding van die waardes van die eienskap beskik. In die geval van Galton se eksperiment het die kandidaat 'n interne versameling van pare. Die kandidaat moet dus 'n aanvoeling van die verdeling van osse hê, aangesien hy beskrywende statistiek het, soos onder andere die grootste en kleinste osse, die middelste os, en hoe die gewig van die vleis varieer. Deur osse op hierdie manier te beskou, het die kandidaat daarin geslaag om die gewig van die vleis met 'n enkele veranderlike te verbind, naamlik waar op die skaal van osse die nuwe os hom bevind.
3. Die kandidaat vergelyk die instansie met ander instansies van die klas. Uit werk deur Kahneman en Tversky (1973) blyk dit dat mense oor gesofistikeerde interne meganismes beskik om sulke vergelykings akkuraat te kan uitvoer.
4. Indien die passing volmaak is, dit wil sê indien die kandidaat 'n vorige instansie van die klas kan herroep wat identies aan die huidige instansie is, word die waarde van die vorige instansie eenvoudig toegeken aan die nuwe instansie. Indien die passing egter nie volmaak is nie, sal die kandidaat sy gesofistikeerde verteenwoordigendheids-apparatuur inspan en die nuwe instansie tussen twee bestaande instansies van die klas plaas. Die kandidaat sal moontlik besluit dat die nuwe instansie meer gemeen het met een van die bestaande instansies en gevolglik die nuwe instansie dienooreenkomstig plaas.
5. Die kandidaat skat die waarde van die kwantifiseerbare eienskap deur te interpoleer tussen die twee bekende waardes aan weerskante van die onbekende waarde, met inagneming van die relatiewe posisie van die nuwe instansie ten opsigte van die bestaande instansies.

Ons ondersoek verder die gevolge van die algoritme.

### 3. Analise

Laat  $\mathcal{Y} = \{(o_i, y_i)\}_{i=1}^n$  die versameling van bekende pare wees waarvan elke paar 'n os,  $o_i$ , met 'n gewig,  $y_i$ , vereenselwig. Die versameling is in stygende volgorde van gewig gerangskik, d.w.s.

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n.$$

Laat  $Y$  die kansveranderlike wees vir die populasie se vleisgewig, met  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ . Vir 'n spesifieke os,  $o_i$ , is die waarneming  $y_i$ . Definieer die gestandaardiseerde indeks (z-telling):

$$x_i = \frac{y_i - \mu}{\sigma},$$

sodat, oor die populasie,  $X = \frac{Y - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Die affiene afbeelding terug na die oorspronklike skaal is

$$f(x_i) = \mu + \sigma x_i \Rightarrow y_i = f(x_i).$$

Neem nou 'n nuwe os,  $o_s$ , wat nie in  $\mathcal{Y}$  voorkom nie. 'n Waarnemer posisioneer  $o_s$  tussenin twee osse,  $o_r$  en  $o_t$ , in die geordende indeksruimte van  $\mathcal{Y}$ , met  $r < t$ , en 'n (nieheelgetal-) tussenin-indeks  $s \in [r, t]$ . Definieer die fraksionele posisie:

$$\phi := \frac{s - r}{t - r} \in [0, 1].$$

Omdat die waarnemer geen toegang tot  $x_r$ ,  $x_t$  of  $\sigma$  het nie, word die skatting op die waarde-as uitgevoer. Ons dui hierdie gewigskatting aan met  $\hat{y}_s$ :

$$\hat{y}_s = y_r + \phi(y_t - y_r).$$

In die ideale (volledig bekende) lineêre geval sou  $\phi = \frac{x_s - x_r}{x_t - x_r}$  en  $y_t - y_r = \sigma(x_t - x_r)$ , wat  $\hat{y}_s = y_r + \sigma(x_s - x_r)$  lewer. Prakties is  $(x_s - x_r)$  en  $\sigma$  onbekend en moet dus geskat word.

Om die impak van 'n skattingsfout te formaliseer, laat  $\hat{f}$  die waarnemer se beraming van die terugskakeling  $f$  wees. Ons skryf nou die gewigskatting  $\hat{y}_s$  as 'n plaaslike eerste-orde-Taylor-reeks-uitbreiding:

$$\hat{y}_s = y_r + \delta \hat{f}'(\hat{x}_s),$$

waar  $\delta \geq 0$  die waarnemer se geskatte horisontale verskil is  $(\hat{x}_s - x_r)$ , en  $\hat{f}'(\hat{x}_s)$  die geïmpliseerde plaaslike helling. Indien geen skattingsfout gemaak word nie, m.a.w. as  $\hat{y}_s = y_s$  en  $\delta = x_s - x_r$ , vind ons dat  $\hat{f}'(\hat{x}_s) = \sigma$ . Ons is dus primêr geïnteresseerd in gevalle wanneer  $\delta \neq x_s - x_r$ , wat waarskynlik sal gebeur, omdat die waarnemer nie toegang tot  $x_s$  en  $x_r$  het nie.

Om  $\hat{f}'$  se vorm te identifiseer, gebruik ons die booglengte van die funksionele kromme as operasionele leidraad. Die booglengte langs die kromme wat die punte  $(a, f(a))$  en  $b, f(b))$  verbind, word gegee deur:

$$\mathcal{L}(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^2} dx.$$

Vir die lineêre basis,  $f(x) = \mu + \sigma x$ , is  $f'(x) = \sigma$  konstant, dus

$$\mathcal{L}(a, b) = \sqrt{1 + \sigma^2}(b - a) \Rightarrow f(b) - f(a) = \frac{\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \mathcal{L}(a, b).$$

Tot dusver dien die lineêre basis as anker. Indien die waarnemer die  $x$ -waardes in die definisieversameling direk sou kon meet, sou die terugskakeling affien wees en die verband tussen vertikale verandering en booglengte sou deur bogenoemde identiteit vasgelê word. In die werklike skattingsituasie het die waarnemer egter geen direkte toegang tot waardes in die definisieversameling nie, en die horisontale verskil word daarom deur 'n geskatte stapgrootte,  $\delta$ , verteenwoordig. Ons gebruik gevolglik booglengte as 'n operasionele maatstaf vir hoe ver twee nabye posisies op die kromme uitmekaar is, en neem in die skattingstap aan dat die plaaslike helling eweredig is aan hierdie booglengte oor  $\delta$ . Hierdie aanname is veral redelik vir klein  $\delta$ , waar die kromme oor die betrokke interval goed deur 'n eerste-orde-benadering beskryf word. Met hierdie lineêre identiteit as anker kombineer ons nou die booglengte-verhouding met die plaaslike skatting.

Uit die identiteit hier bo, en uit ons plaaslike skatting,  $\hat{y}_s = y_r + \delta \hat{f}'(\hat{x}_s)$ , verkry ons

$$\hat{f}'(\hat{x}_s) = \kappa \int_{x_r}^{\hat{x}_s} \sqrt{1 + (\hat{f}'(u))^2} du, \quad \kappa := \frac{\sigma}{\delta \sqrt{1 + \sigma^2}}.$$

Stel  $z(x) := \hat{f}'(x)$ . Differensieer met betrekking tot  $\hat{x}_s$  (met vaste onderste grens  $x_r$ ) en skei veranderlikes:

$$z'(\hat{x}_s) = \kappa \sqrt{1 + (z(\hat{x}_s))^2} \Rightarrow \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \kappa \int dx \Rightarrow \operatorname{asinh}(z(\hat{x}_s)) = \kappa \hat{x}_s + \lambda,$$

dus

$$\hat{f}'(x) = \sinh(\kappa x + \lambda).$$

Die geïmpliseerde nielineêre skatting is gevolglik

$$\hat{y}_s = y_r + \delta \sinh(\kappa \hat{x}_s + \lambda).$$

Die skatting herlei 'n normaalverdeling via 'n hiperboliese ( $\sinh$ -) transformasie tot 'n Johnson-SU-verdeling (Johnson 1949).

Om vergelykbaarheid met die lineêre basis,  $f(x) = \mu + \sigma x$ , te behou, normaliseer ons die sinh-term onder  $X \sim \mathcal{N}(0,1)$  en skryf

$$\hat{f}(x_i) = \mu^* + \sigma^* z_i^*,$$

waar  $z_i^* := \frac{\sinh(\kappa x_i + \lambda) - z_1}{z_2}$ ,  $z_1 := \mathbb{E}[\sinh(\kappa X + \lambda)]$ , en  $z_2 := \sqrt{\text{Var}[\sinh(\kappa X + \lambda)]}$ .

Met hierdie parametrisering word die oorspronklike spesifikasie,

$$\hat{y}_i = y_r + \delta \sinh(\kappa \hat{x}_i + \lambda),$$

herskryf deur die konstante en skaal  $(\mu^*, \sigma^*)$  op te neem:

$$\mu^* := y_r + \delta z_1, \quad \sigma^* := \delta z_2.$$

Gevolglik verskyn  $\delta$  nie as 'n afsonderlike parameter in  $\hat{f}(x)$  nie; dit is volledig opgeneem in  $\mu^*$  en  $\sigma^*$ , wat die vorm direk vergelykbaar met die lineêre basis maak.

Bylae A, B en C bevat die afleidings vir die kumulatiewe verdelingsfunksie, waarskynlikheidsdigtheidsfunksie, log-aanneemlikheidsfunksie, en sentrale momente van hierdie transformasie.

#### 4. Evaluasie

Ons toets die meriete van die aangepaste verdeling, soos hier bo uiteengesit, deur dit op die Galton-datastel (sien 2.1 hier bo) toe te pas. Ons pas parameters  $\theta = (\mu, \sigma, \lambda, \kappa)'$  deur middel van die log-aanneemlikheidsfunksie (sien bylaag B). Die parameters wat uit die passing verkry is, afgerond tot 4 beduidende syfers, is  $\hat{\theta} = (1196; 77,53; -0,3476; 0,8206)'$ .

Ons beweer dat die nuwe verdelingsfunksie (sinh-gebaseerde verdeling), wat ons die *Shin*<sup>3</sup>-verdeling noem, die data beter pas as twee passings van die normaalverdeling wat in die literatuur beskryf word, naamlik Galton se passing ( $\mu = 1207$ ;  $\sigma = 54,9$ ) en Pearson se passing ( $\mu = 1197$ ;  $\sigma = 61,9$ ) soos uiteengesit deur Wallis (2014). Ons vergelyk ook die Shin-verdeling met dubbele twee-deel (DTP)-t (Rubio en Steel 2015) verdeling wat soortgelyk is aan die verdelings wat deur Rubio (2017) en Wallis (2014) aangetoon word. Hier pas ons self die parameters,  $\psi = (\mu, \sigma_L, \sigma_R, \delta_L, \delta_R)$ , deur die log-aanneemlikheidsfunksie te maksimeer. Die parameters wat uit die passing verkry is, afgerond tot 4 beduidende syfers, is  $\hat{\psi} = (1226; 66,70; 31,59; 4,526; 2,272)'$ .

Om hierdie hipotese te toets gebruik ons die Kolmogorov-Smirnov-toets, wat 'n nieparametriese metode is om die empiriese verdeling van die steekproefdata te vergelyk met die teoretiese verdeling van ons voorgestelde funksie. Die nulhipotese ( $H_0$ ) stel dit dat die steekproefdata die voorgestelde verdeling volg, terwyl die alternatiewe hipotese ( $H_1$ ) beweer dat dit nie so is nie.

Ons bereken die maksimum- absolute afwyking tussen die empiriese kumulatiewe verdelingsfunksie van die data en die teoretiese kumulatiewe verdelingsfunksie (sien bylaag A) van die voorgestelde verdeling, wat in hierdie geval 0,03 is. Die kritieke waarde vir die Kolmogorov-Smirnov-toets by 'n betekenisvlak van 0,05 is 0,048, gebaseer op 787 waarnemings. Aangesien die maksimumafwyking van 0,03 minder is as die kritieke waarde van 0,048, kan ons nie die nulhipotese verwerp nie, wat aandui dat ons voorgestelde verdeling die data voldoende pas.

Die maksimumafwyking vir Galton se passing word bereken as 0,081. In hierdie geval is die maksimumafwyking groter as die kritieke waarde, en moet ons die nulhipotese verwerp. Dit dui daarop dat Galton se verdeling nie die data voldoende pas nie.

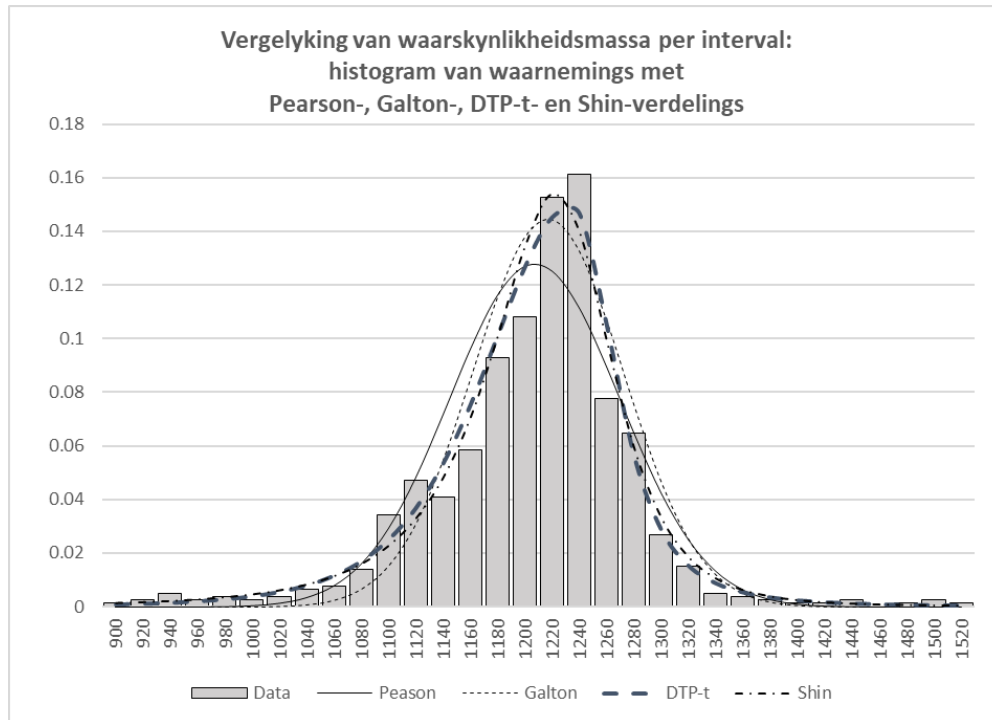
Die maksimumafwyking vir Pearson se passing word bereken as 0,075. Ook in hierdie geval is die maksimum afwyking groter as die kritieke waarde, en moet ons die nulhipotese verwerp. Dit dui aan dat Pearson se verdeling nie die data voldoende pas nie.

Die maksimumafwyking vir die DTP-t-verdeling word bereken as 0,033. In hierdie geval is die maksimumafwyking kleiner as die kritieke waarde, en kan ons nie die nulhipotese verwerp nie, wat aandui dat die DTP-t-verdeling die data voldoende pas.

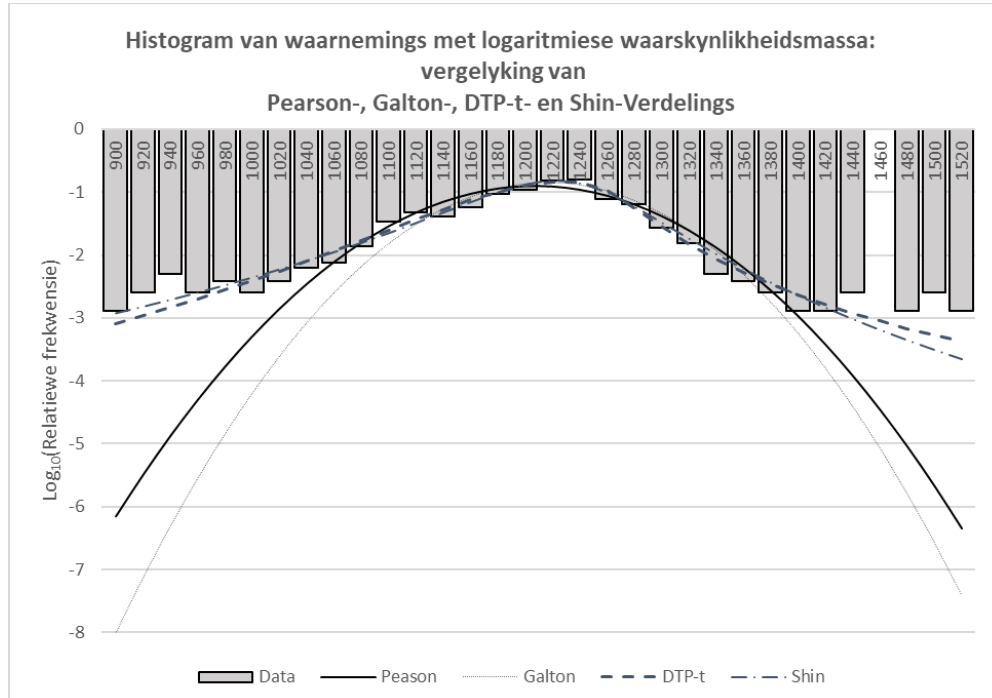
Figuur 1 toon die waarskynlikheidsmassa per vaste interval ( $\Delta x$ ) van vier verdelings, gesuperponeer op 'n staafhistogram van die data. Ons gebruik 'n CDF-verskil om die massa per interval te skat,  $p_i = F(x_i) - F(x_i - \Delta x)$ . Die Shin- en DTP-t-verdelings is merkbaar meer spits (smaller in die middel) met swaarder sterte as die normaalgebaseerde passings (Galton, Pearson). Hierdie profiel verbeter die passing op twee maniere:

- i. In die interkwartielgebied oorskakel die normaalgebaseerde passings tipies die breedte van die verdeling en pas dus swakker rondom die mediaan, terwyl Shin en DTP-t 'n hoër piek en beter passing in die middel lewer.
- ii. In die sterte onderskat die normaalgebaseerde passings die frekwensie van uiterstes – soos duidelik in Figuur 2 (logskaal op die y-as), waar die afwyking drie tot vyf grootte-orde kan beloop – terwyl Shin en DTP-t dié sterte wesenlik beter akkommodeer.

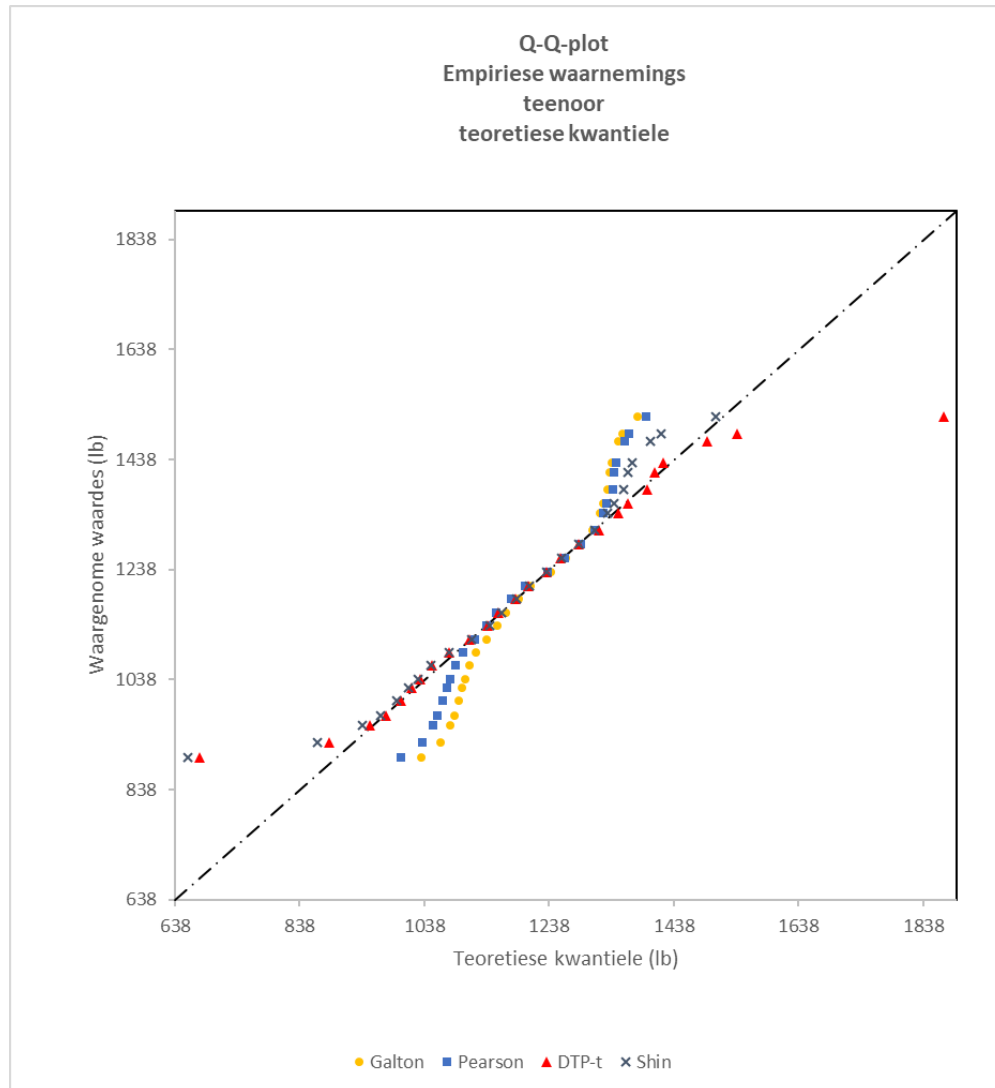
Benewens die Kolmogorov-Smirnov-toets gebruik ons Q-Q-plotte (plotposisies  $(i - \frac{3}{8})/(n + \frac{1}{4})$ ; (Blom 1958) om grafies te evalueer hoe goed die Pearson-, Galton-, DTP-t- en Shin-verdelings die empiriese verspreiding van die data beskryf. Figuur 3 wys dat die normaalgebaseerde verdelings grootliks naby die 45°-lyn lê in die middel, maar sistematies in albei sterte wegbeweeg. Die DTP-t- en Shin-verdelings sluit beter by die sterte aan. Die laagste Shin-verdeling-kwantiel lê links van die 45°-lyn – 'n aanduiding van swaarder onderste sterte. Die DTP-t-verdeling is baie soortgelyk aan die Shin-verdeling, maar wyk merkbaar meer af van die 45°-lyn by die hoogste kwantiel.



**Figuur 1.** Histogram van die Galton-data. Stawe wys relatiewe voorkoms per waarde-kategorie. Die onderskeie lyne stel die waarskynlikheidsmassa per interval voor. Soliede lyn: Pearson se passing. Dun stippellyn: Galton se passing. Vet stippellyn: DTP-t-verdeling. Streep-puntlyn: Shin-verdeling.



**Figuur 2.** Histogram van die Galton-data met 'n logaritmiëse y-as om sterte te beklemtoon. Die onderskeie lyne stel waarskynlikheidsmassa per interval voor. Soliede lyn: Pearson se passing. Dun stippellyn: Galton se passing. Vet stippellyn met kolletjies: DTP-t-verdeling. Streep-puntlyn: Shin-verdeling.



**Figuur 3. Q–Q-plot: Empiriese waardes (Y) teenoor modelkwantiele (X) vir Pearson, Galton, DTP-t en Shin. Die 45°-lyn ( $y = x$ ) dui perfekte passing aan. Vir leesbaarheid is die sentrale gedeelte van die plot uitgedun, terwyl die sterte relatief digter verteenwoordig word, met die minimum en maksimum steeds ingesluit.**

## 5. Bespreking

Die kern van ons argument berus op die feit dat wanneer die kwantifiseerbare eienskap geskat word vanuit verskynsels wat nie direk kwantifiseerbaar is nie, dit moontlik is om skattings op die waardeversameling uit te voer deur tussen bekende waardes te interpoleer. Ons beklemtoon dat die kwantifiseerbare eienskap (gewig van die vleis) as basis (ongeveer) normaalverdeel is. Dan is  $f(x) = \mu + \sigma x$  affien en  $f'(x) = \sigma$  konstant, wat die verhouding tussen vertikale verandering en booglengte verskaf. Dié kalibrasie dien as anker om die implisiete verband vir  $\hat{f}'(x)$  te spesifiseer en lei tot die sinh-vorm wat in afdeling 3 afgelei is.

Die analise weerspieël die idee dat skattings van meetbare eienskappe van onmeetbare verskynsels hiperboliese (sinh-) verbuiging tot gevolg het.

Sover dit 'n geskikte verdeling betref, is dit waarskynlik dat die normaalverdeling nie die enigste verdeling is waar  $y$ -as-interpolasie van eienskappe van onmeetbare verskynsels tot hiperboliese verbuiging lei nie. Ander verdelings mag ook soortgelyke ekwivalente verhoudings tot gevolg hê, maar dit is moeiliker om algebraïes aan te toon.

Dit is ook nie nodig dat die kwantifiseerbare eienskap gemeet kan word nie. Galton se eksperiment is nuttig omdat ons die vleis wat uit die os geslag is, kan meet, maar die meting self dra nie by tot die analise nie.

'n Verdere implisiete aanname was dat die kandidaat al met instansies van die bepaalde klas te doen moes gehad het en bekend moes gewees het met die waardes van die kwantifiseerbare eienskap van die instansies. Dit mag dalk nie noodsaaklik wees nie. Dit is bekend dat mense gebruik maak van analogieë as 'n strategie om leemtes in hul verwysingsraamwerk aan te vul (Chan e.a. 2012).

## 6. Samevatting

In hierdie artikel argumenteer ons dat 'n denkfout plaasvind wanneer 'n meetbare eienskap van 'n onmeetbare verskynsel geskat word. Hierdie denkfout manifesteer onder spesifieke omstandighede, waarvan die belangrikste is dat die eienskap normaalverdeel is en dat die skatter sy skatting op 'n enkele parameter baseer. Hierdie enkele parameter het analogieë met die verspreiding van die kwantifiseerbare eienskap. Aangesien die onderliggende verskynsel nie meetbaar is nie, het die skatter min keuse, behalwe om die skatting te maak deur bekende waardes van soortgelyke verskynsels te interpoleer.

Die aannames is van so 'n aard dat die verhouding van die waarde van die eienskap ten opsigte van die waardes van soortgelyke gevalle identies is aan die geval waar interpolasies op die funksionele kromme uitgevoer word. Dit lei tot 'n verbuiging wat deur 'n hiperboliese funksie gemodelleer kan word.

Ons lei 'n verdelingsfunksie af en toets hierdie funksie, wat die data pas volgens die Kolmogorov-Smirnov-toets. In ons bespreking ondersoek ons die moontlikheid om die aannames wat die geldigheid van die analise ondersteun, te verwater. Die normaalverdeling is nie 'n vereiste nie, solank die verdeling die eienskap het dat interpolasies op die  $y$ -as (genoegsaam) ekwivalent is aan die interpolasies op die funksionele kromme. Verder blyk dit dat dit nie noodsaaklik is om die kwantifiseerbare eienskap te meet nie, aangesien die meting nie deel van die analise uitmaak nie. Dit is ook moontlik dat kandidate se verwysingsraamwerk nie presiese replikas van die betrokke klas hoef te wees nie, aangesien daar getuienis is dat mense sulke leemtes met analogieë kan aanvul.

Ons navorsing het ons bewus gemaak van leemtes wat gevul moet word. Die eerste leemte is om die bevindinge nie deur 'n gedagte-eksperiment nie, maar deur konkrete eksperimente te bevestig. Die tweede leemte wat gevul moet word, het betrekking op die verwatering van

aannames in die bespreking. Ons bespreking is merendeels spekulatief, en verdere navorsing is nodig om hierdie aannames formeel te verwater.

## Bibliografie

- Almaatouq, A., M. Rahimian, J. Burton en A. Alhajri. 2022. The distribution of initial estimates moderates the effect of social influence on the wisdom of the crowd. *Scientific Reports*, 12(16546).
- Blom, G. 1958. *Statistical estimates and transformed beta-variables*. New York: John Wiley & Sons.
- Chan, J., S.B. Paletz en C.D. Schunn. 2012. Analogy as a strategy for supporting complex problem solving under uncertainty. *Memory & Cognition*, 40:1352–65.
- Feller, W. 1971. *An introduction to Probability Theory and its applications*. 2de uitgawe. Vol. 2. New York: John Wiley & Sons Inc.
- Galton, F. 1907. Vox Populi. *Nature*, 75:450–1.
- Johnson, N.L. 1949. Systems of frequency curves generated by methods of translation. *Biometrika*, 36(1–2):149–76.
- Kahneman, D. en A. Tversky. 1973. On the psychology of prediction. *Psychological Review*, 80:237–51.
- Montibeller, G. en D. von Winterfeldt. 2015. Cognitive and motivational biases in decision and risk analysis. *Risk Analysis*, 35(7):1230–51.
- Rubio, F.J. 2017. *Galton's forecasting competition*. Herwin van RPub by RStudio. <https://www.rpubs.com/FJRubio/Galton>.
- Rubio, F.J. en M.F. Steel. 2015. Bayesian modelling of skewness and kurtosis with two-piece scale and shape distributions. *Electronic Journal of Statistics*, 9(2):1884–1912.
- Simoiu, C., C. Sumanth, A. Mysore en S. Goel. 2019. Studying the “Wisdom of crowds” at Scale. *Proceedings of the AAAI Conference on Human Computation and Crowdsourcing*, 7(1):171–9.
- Tversky, A. en D. Kahneman. 1974. Judgment under uncertainty: heuristics and biases. *Science*, 185(4157):1124–31.
- Wallis, K.F. 2014. Revisiting Francis Galton's forecasting competition. *Statistical Science*, 29(3):420–4.
- Zhu, D. en J.W. Galbraith. 2010. A generalized asymmetric Student-t distribution with application to financial econometrics. *Journal of Econometrics*, 157(2):297–305.

Zvi, I. en H. Bergman. 2008. Pathophysiology of the basal ganglia and movement disorders: from animal models to human clinical applications. *Neuroscience and Behavioral Reviews*, 32(3):367–77.

## Eindnotas

<sup>1</sup> Let wel: In hierdie geval skat ons die verwagte waarde deur die rekenkundige gemiddeld van die onderskeie metings te bereken.

<sup>2</sup> Neem  $n$  kansveranderlikes  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  wat

1. onafhanklik, en identies verdeel is
2. almal dieselfde verwagte waarde  $\tilde{\mu}$  het
3. almal dieselfde variansie,  $\tilde{\sigma}^2$  het, met  $0 < \tilde{\sigma}^2 < \infty$ ;

dan sal die gestandaardiseerde steekproefgemiddelde,  $\frac{\sqrt{n}(\bar{Z}_n - \tilde{\mu})}{\tilde{\sigma}}$ , na 'n standaard normaal-verdeling  $\mathcal{N}(0,1)$  konvergeer soos wat  $n \rightarrow \infty$ .

<sup>3</sup> *Shin* is 'n assimilasie van *sinh*, wat die verkorte funksienaam vir die hiperboliese sinus-funksie is.

$$^4 \tilde{\mu}_k := \mathbb{E} \left[ \left( \frac{Z - \mathbb{E}[Z]}{\sqrt{(Z - \mathbb{E}[Z])^2}} \right)^k \right]$$

Bylae

## A. Verdelingsfunksies

Laat  $Z = \mu + \sigma \frac{\sinh(\kappa X + \lambda) - z_1}{z_2}$ , waar  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , en  $z_1 = \mathbb{E}(\sinh(\kappa X + \lambda)) = e^{\frac{1}{2}\kappa^2} \sinh(\lambda)$ , en  $z_2 = \sqrt{\mathbb{E}[(\sinh(\lambda + \kappa X) - z_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}(e^{\kappa^2} - 1)(e^{\kappa^2} \cosh(2\lambda) + 1)}$ .

Die kumulatiewe verdelingsfunksie word soos volg afgelei:

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \Pr(Z \leq x) \\ &= \Pr\left(\frac{\sinh(\lambda + \kappa X_t) - z_1}{z_2} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Pr\left(X_t \leq \frac{\sinh^{-1}\left(z_2 \frac{x - \mu}{\sigma} + z_1\right) - \lambda}{\kappa}\right) \\ &= F_X\left(\frac{\sinh^{-1}\left(z_2 \frac{x - \mu}{\sigma} + z_1\right) - \lambda}{\kappa}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sinh^{-1}\left(z_2 \frac{x - \mu}{\sigma} + z_1\right) - \lambda}{\sqrt{2}\kappa}\right)\right). \end{aligned}$$

Ons differensieer die kumulatiewe funksie om die **waarskynlikheidsdigtheidsfunksie** te bekom.

$$f_Z(x) = \frac{z_2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda - \sinh^{-1}\left(z_2 \frac{x - \mu}{\sigma} + z_1\right)}{\kappa}\right)^2}}{\sqrt{2\pi\kappa^2\sigma^2\left(1 + \left(z_2 \frac{x - \mu}{\sigma} + z_1\right)^2\right)}}.$$

## B. Log-aanneemlikheidsfunksie

Die log-aanneemlikheidsfunksie word as volg bepaal:

$$\log(f_Z(x)) = \log(z_2) - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda - \sinh^{-1}(z_3)}{\kappa}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\log(2\pi) + \log(\kappa^2\sigma^2(1 + z_3^2))\right).$$

Let wel die verkorting:  $z_3 := z_2 \frac{x - \mu}{\sigma} + z_1$ .

Ons laat vaar die konstante waardes om die log-aanneemlikheidsfunksie te verkry:

$$\ell_Z(\theta; x) = \log(z_2) - \frac{1}{2}\left(\frac{(\lambda - \sinh^{-1}(z_3))^2}{\kappa^2} + \log(\kappa^2\sigma^2(1 + z_3^2))\right), \text{ waar } \theta = (\mu, \sigma, \lambda, \kappa)' \text{ die vektor van parameters is.}$$

### C. Sentrale momente

Die gestandaardiseerde sentrale momente vir kansveranderlikes wat uit 'n  $Z$ -verdeling (sien A) getrek is, met parameters  $\theta = (\mu, \sigma, \lambda, \kappa)'$ , word aangedui met  $\tilde{\mu}_k$  waar  $k$  die graad van die moment is.<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \mu \\ \mathbb{E}[(Z - \mu)^2] &= \sigma^2 \\ \tilde{\mu}_3 &= \frac{(e^{\kappa^2} - 1)^2 e^{\frac{\kappa^2}{2} - 3\lambda} (e^{\kappa^2} A (e^{6\lambda} - 1) + 6e^{3\lambda} \sinh(\lambda))}{2\sqrt{2} \left( (e^{\kappa^2} - 1)(e^{\kappa^2} \cosh(2\lambda) + 1) \right)^{3/2}} \\ \tilde{\mu}_4 &= \frac{e^{-4\lambda} (4A e^{2(\kappa^2 + \lambda)} + 4A e^{2\kappa^2 + 6\lambda} + 6(2e^{\kappa^2} + 1)e^{4\lambda} + B e^{2\kappa^2 + 8\lambda} + e^{2\kappa^2} B)}{4(e^{\kappa^2} \cosh(2\lambda) + 1)^2} \end{aligned}$$

Let wel die verkortings:

$$\begin{aligned} A &= e^{\kappa^2} + 2 \\ B &= e^{2\kappa^2} (e^{\kappa^2} A + 3) - 3. \end{aligned}$$