

Digitale profieldekomposisie^a

Carl Rohwer en Reg Dodds,
Fakulteit Natuurwetenskappe, Universiteit Stellenbosch

Opsomming

Hierdie artikel bespreek die ekonomiese stoor en transmissie van 'n algemene gekwantifiseerde profiel of 'n histogram. Ons toon aan dat een goeie kandidaat 'n spesifieke diskrete pulstransform is, gebaseer op die klas van sogenaamde LULU-gladstrykers. Die betrokke idees bied 'n verskeidenheid moontlikhede vir ekonomiese beeldtransmissie. Baie multidimensionele ontledings is konstrueerbaar analoog aan die eendimensionele prototipe.

Trefwoorde: beeldtransmissie; kwantifiseerde profiel; LULU-gladstryker; multiresolusie-dekomposisie; positiewe pulstransform

Summary

This article discusses the economical storage and transmission of a general quantified profile or a histogram. We demonstrate that a good candidate is a specific discrete pulse transform (DPT), based on the class of so-called LULU smoothers. The ideas involved here offer a variety of possibilities for economical image transmission. Many multidimensional analyses are constructible analogous to the one-dimensional prototype.

Keywords: image transmission; LULU-smoother; multiresolution decomposition; positive pulse transform; quantised profile

Extended abstract

After pursuing general LULU-theory for many years, it has become evident to the authors that the similar, but simpler, cases of multiresolution analysis and multiresolution decomposition with L-smoothers may be particularly useful and significant for many applications. This insight comes from many real applications and from surprising results in theoretical research, and their similarity with spline wavelet theory [1].

We aim to present and motivate this with arguments that are easy to picture in the context of the simple case of storing and transmitting the sequence $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ as economically as possible. Easy visualisation comes from the analogy of a *Lego* wall built with a minimal number of blocks of integral height and width. We hope to reach people unacquainted with LULU-theory [2], which is still unfamiliar and strange to many. We derive and present the positive pulse transform

^a Hierdie artikel word opgedra aan Dirk Laurie.

(PPT) and argue that it has significant properties in a relatively self-contained way, rather than by analogy of the general theory. The reader can verify these properties.

We start by defining the L-smoothers for the removal of upward pulses in a sequence.

Given a sequence $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in \mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ and selecting $x_i = 0$ for $i \notin [1, 2, \dots, N]$, for the purpose of simplifying, we define the smoothers L_n , for all $n \geq 0$.

Definition: $(L_n \mathbf{x})_i = \max\{\min\{x_{i-n}, \dots, x_i\}, \min\{x_{i-n+1}, \dots, x_{i+1}\}, \dots, \min\{x_i, \dots, x_{i+n}\}\}$.
By associating sequences $\mathbf{x}$ with coefficients of polynomial B-spline basis functions of any degree/order, we can generalise the operators to smoothers on spline spaces. Clearly $L_0 = I$, is the identity operator.

We note several simple, but crucial, properties that apply in general LULU-theory [2].

- (a) The operators are syntone, in that $y \geq x \Rightarrow L_n y \geq L_n x$.
- (b) The operators are variation preserving, in that $T(L_n \mathbf{x}) + T(I - L_n \mathbf{x}) = T(\mathbf{x})$, where $T(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=0}^{N+1} |x_i - x_{i-1}|$, the total variation of $\mathbf{x}$. Clearly L_n are variation reducing.
- (c) The operators L_n and $I - L_n$ are neighbour trend preserving, in that they preserve order between neighbouring elements. For example, $x_i \geq x_{i+1} \Rightarrow L_n x_i \geq L_n x_{i+1}$.
- (d) L_n is difference reducing in that $|L_n x_i - L_n x_{i+1}| \leq |x_i - x_{i+1}|$.

We introduce the multiresolution decomposition (MRD) and the positive pulse transform (PPT) of a sequence $\mathbf{x}$ as $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N r^i$ with $r^i = (I - L_i)L_{i-1}$. Showing that r^i consists of a sequence of positive blockpulses separated by at least one zero between them, we conclude that the sum of all the blockpulses b_{ij} in the different resolution levels r^i form a linearly independent set, and thus a basis for some subspace of $\mathbf{X}$.

We define the blockpulse b_{ij} as the pulse in r^i that is nonzero only on the interval $[j, j+1, \dots, j+k-1]$.

The mapping of $\mathbf{x}$ onto the coefficients of $\mathbf{x}$ with respect to the block basis is called the PPT, although it is not linear, and thus not a transform in the accepted sense. Two figures display the properties.

Since the operators are variation preserving, we have that $T(\mathbf{x}) = \sum_i T(r^i)$, and $T(b_{ij})$ is twice the height $|b_{ij}|$ of the blockpulse and $T(r^i)$ is twice the sum of the height of the blockpulses in r^i .

When the sequences are the coefficients of a B-spline representation of a spline we also have that the operators are area preserving, and we argue that the positive blockpulses are a basis for a subspace that contains the spline function identified with $\mathbf{x}$. The subsets of basis functions in r^n are of progressively lower resolution levels, so that we automatically have an MRD of the function. This MRD is nonlinear, and it can be shown to be fully trend preserving and locality preserving, but a theorem is derived that shows that decomposition is linear on the cone spanned by the blockpulses. Thus the transformation is cone linear. This was proved for the pulse decomposition with the composite smoothers $L_n U_n$ and $U_n L_n$, and supplemented with the highlight conjecture [2]. The conjecture was later proved. All those proofs made use of the concept of local monotonicity, which is a property of all eigensequences of the composite smoothers, but not of the component smoothers L_n and U_n .

This necessitated separate proofs for the positive pulse transform, which has the merit of being easy to visualise as the construction of a *Lego*-wall with a minimal number of blocks. Although, generally, it is easy to prove that the number of blocks in the Lebesgue form is not more than the Riemann form, the real economisation comes in many modern digital applications where quantising

leads to $H < N$ different values in the original sequence. Then the Lebesgue form has only H blocks in a lossless representation.

Apart from the i.i.d. random noise on the original values of $\mathbf{x}$, the quantising introduces further noise from a uniform distribution. In such a case we have efficient estimates [3] of the average and standard deviation from the smallest resolution level blocks for construction of texture on constant sections of $\mathbf{x}$, in the case where $\mathbf{x}$ is a sequence of intensity levels of a digital image. Alternatively we can construct good approximations by slightly modified lower resolution levels and the omission of the highest resolution pulses, which constitute almost half of the H pulses.

The simplest, and almost overloaded, positive pulse transform may turn out to be the most illuminating and useful of the LULU-transforms in multiresolution decomposition.

This remarkable property comes from the established fact that all the operations involved are shape preserving, not only in the sense that all non-negative linear combinations in the non-negative cone have the same order between neighbouring elements as the original function, and that any section of the function above a chosen blockpulse is unaffected by changes outside its positive support. This “locality preservation” demonstrates that we have no Gibbs’s phenomenon when we approximate by omitting high resolution levels for compactification. This demonstrates that we can “highlight” some particular section of the original function by magnifying the pulses above a given support block. This is useful for identification, recognition and comparison of particularly significant features.

We call the canonical representation the “Riemann form” and the chosen MRD version the “Lebesgue form”, as they suggest an analogy to the definitions of the different integrals [4].

The theorems proved show that the blockpulses form a basis, that the MRD is cone-linear, and the decomposition into blockpulses does not have more blocks than the canonical form.

Inleiding

Die vinnige Fourier-transform (FFT) word wyd beskou as een van die waardevolste wiskundige instrumente in die tegnologie van die vorige eeu. Golfietransforms is sekerlik noodsaaklike gereedskap vir ekonomiese klanktransmissie/-berging en baie verwante toepassings, sowel as uitbreiding na beeldverwerking waar doeltreffendheid tans miskien nie so skouspelagtig is nie. Tydens sy verbeeldingryke, skerpsinnige en indrukwekkende lesings by ’n seminar, het Charles Chui herhaaldelik gemaan teen buitensporige verwagtings met die kritieke waarskuwing, “Onthou die faseprobleem!” Benaderings in die golfiebasis kan lokaliteit verloor.

Transformasies in Lineêre Algebra, is daardie spesifieke lineêre afbeeldings wat die koëffisiëntvektor van een vektor met betrekking tot ’n bepaalde basis afbeeld op ’n koëffisiëntvektor met betrekking tot ’n ander basis. Sulke afbeeldings word bereken deur matriksvermenigvuldigings. Dit is ’n rekenkundige las. Die vinnige Fourier-transform (FFT) gebruik ekonomiese faktorisering.

Maar waarom is dit nodig of nuttig om vektore van een basis na ’n ander oor te dra?

Die berekeningskoste van ’n transform kan geregverdig word as dit vergoed word deur die besparing van transformasie-/bergingskoste in die gewenste klas seine wat hanteer moet word.

Vir die FFT mag dit wees dat die noodsaaklike verlangde inligting bandbeperk is, as gevolg van die aard van menslike gehoor. Ons benodig slegs ’n geskikte benadering tot ’n steekproef van

die oorspronklike golfvormvektor, verkry uit 'n monster van 'n golfvorm, om die noodsaaklike inligting oor te dra wat verlang of bedoel word. Soos in driedimensionele Euklidiese Ruimte, is daar geen *à priori* voorkeurbasis vir enige ruimte nie, insluitend dié van $\mathbb{R}^n$. Dit word dikwels vergeet, veral juis deur mense wat vertrou is met die uitstekende kenmerke van 'n nuttige instrument soos die FFT onder toepaslike omstandighede.

Golfteorie het instrumente vir tegnologie verskaf, soos in digitale spraaktransmissie/berging. Dit was natuurlik om hierdie instrumente toe te pas vir beeldverwerkingprobleme waar die behoefte aan “lokaliteitsbehoud” prosedures moeilik maak. Veral “Mediaan Transformasies” was dikwels meer suksesvol en spesifiek en betekenisvol in sterrekundige beelde. 'n Gebrek aan 'n “onderliggende teorie” en rekenkundige kompleksiteit is egter soms betreur. LULU-teorie bied onverwagse insig in die waargenome sukses van die “mediaantransforms”, aangesien hierdie deur pare van soortgelyke “Pulstransforms” (PT) ingesluit word, wat 'n grondige teorie besit. Die paar LULU-gladstrykers wat betrokke is, is goeie bo- en onder-benaderings van mekaar, en van die verwante “mediaantransforms”. Hulle verskil slegs op dele van die Nyquist-frekwensie in die dekomposisievlakke! Dit is ook op hierdie frekwensie waar probleme met die Fourier-transform ondervind word.

Die doel van hierdie artikel is om aan te toon dat vir 'n eenvoudige, maar groot, klas gevalle, die keuse van 'n spesifieke eenvoudige “LULU-transform” optimaal is. Ons beweer dat dit 'n goeie navorsingsrigting kan wees, veral in die geval van gewoonlik betekenisvolle dele van rye stippeintensiteite wat ekonomies gestoor of oorgedra moet word.

Daar is ook 'n verskoning ingesluit vir gedeeltelike skuld aan moontlike verwarrende terminologie: nóg die mediaantransform, nóg die pulstransform is transformasies in die aanvaarde definisie van 'n transformasie in lineêre algebra, soos hierbo gedefinieer. Hulle gee dieselfde vektor in terme van (een van) 'n groot klas moontlike basisse. Die spesifieke basis word deur die algoritme en die oorspronklike rye gekies. Die pulstransforms is dus selfs nie lineêr nie. Die basis waarin spesifieke rye koëffisiënte afgebeeld word, is egter outomaties baie betekenisvol, omdat die “transform” lineêr is op die spesifieke keël wat deur daardie basis gegenereer word. Hierdeur verdwyn die lastige faseprobleem by latfunksiegolfietransforms, sowel as die asimptotiese groei in resoluiewydte. Dit word later bewys.

1. Die positiewe pulstransform (PPT)

Beskou 'n muur opgebou uit reghoekige stene van heeltallige lengtes en hoogtes op 'n plat horison. 'n Gemete en gekwantifiseerde histogram kan dit voorstel met geskikte skaal, soos in Figuur 1.(a)

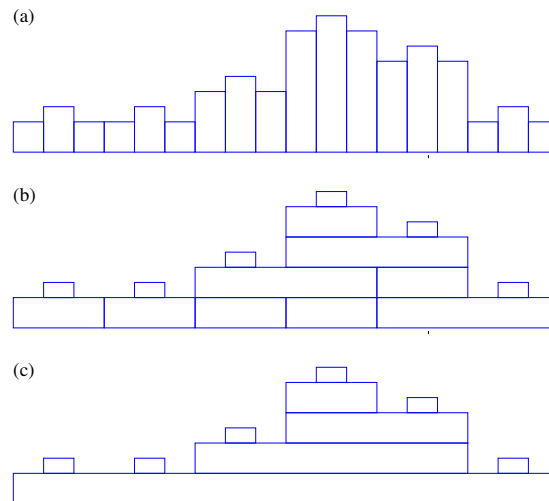
Dieselfde muur kon met minder stene gebou geword het. Toe die steekproef gemaak is, het dit die vektor $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_{18}\}$ gehad soos voorgestel in die gewone B-latfunksiebasis van graad nul. Die koëffisiëntvektor met betrekking tot dié gekose basis is ook $\mathbf{x}$. Ons sal dit die *kanoniese voorstelling* noem, en om dit te versend, benodig ons 18 natuurlike getalle.

Uit die waardes x_i , kan ons die latfunksie van graad nul bepaal waaruit dit 'n monsterring is. Ons beskou net hierdie eenvoudige voorbeeld, maar dit veralgemeen maklik na hoërde latfunksies.

Daar is 'n keuse van LULU-gladstrykers wat berekeningskompleksiteit kan verminder, in 'n belangrike klas gevalle. Ons oorweeg die stel gladstrykers soos volg gedefinieer.

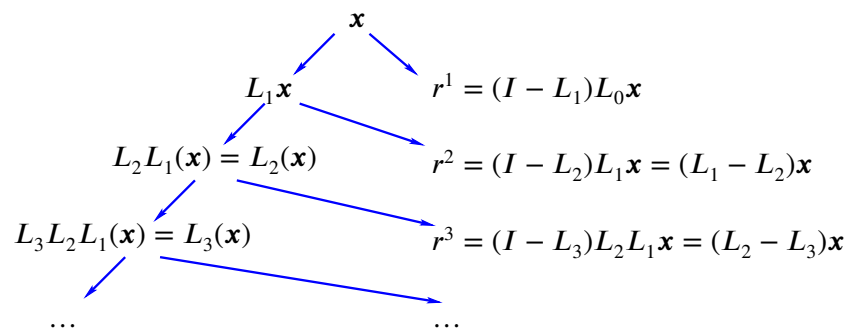
Definisie 1.1. $L_n(\mathbf{x})_i = \max\{\min\{x_{i-n}, x_{i-n+1}, \dots, x_i\}, \min\{x_{i-n+1}, x_{i-n+2}, \dots, x_{i+1}\}, \dots, \min\{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}\}\}$.

Aangesien $0 \leq L_j(\mathbf{x}) \leq L_{j-1}(\mathbf{x})$ vir $n = 1, 2, \dots, j-1$, met $L_0(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}$, sien ons dat elke opeenvolgende gladstryking 'n nienegatiewe resoluasielaag in die vorm van $(I - L_j)(L_{j-1}(\mathbf{x}))$ tydens die j -de gladstryking afstroop. Ons beskou nou die ontledings met die operatore L_n op die



Figuur 1. (a) 'n Profiel in histogramvorm. (b) 'n Lego-steentjiesmuur met dieselfde profiel. (c) Die histogram met minste blokke of stene.

Dit is gerieflik om die histogramvoorstelling van Figuur 1(a) die “Riemann”-vorm en die voorstelling van Figuur 1(c) die “Lebesgue”-vorm te noem.



Figuur 2. L-ontbinding deur opeenvolgende gladstryking met $L_1, L_2, \dots$

vektorruimte $\mathbf{X}$ van die reële ry $\mathbf{x} = \{x_i : 0 \leq i \leq N\}$. Vir daardie doel kies ons $x_i = 0$ vir alle heeltalle $i < 0$ en $i > N$, sodat ons die rye as steekproefprofile op 'n plat horison kan voorstel. Alternatiewe soos periodiese voortsetting kan ook soms gebruik word.

Duidelik kon ons $\mathbf{x}$ direk as N reële getalle versend, maar as ons doel is om slegs 'n profiel te identifiseer, kan ons later aansienlik bespaar deur nie-essensiële hoëresolusie detail prys te gee, en tot lokale dele te beperk. Vir visuele herkenning is dit belangrik om rande te behou en miskien spesifieke identifiseerbare kenmerke op 'n bepaalde resolušievlak te beklemtoon. Die LULU-ontledings het uitsonderlike kenmerke vir hierdie twee vereistes. Hulle is *lokaliteitbewarend*, *randbewarend*, en word ondersteun deur die *beklemtoningstelling*.

Skematies kan ons die L-ontledings, of opeenvolgende gladstryking deur die operatore $L_1, L_2, \dots, L_n$ in Figuur 2 voorstel, waar die resolušiere $r^i = (I - L_i)L_{i-1} \dots L_1 \mathbf{x}$ lewer, met $0 \leq i \leq n$, as dit wat deur die besondere gladstrykers afgeskil word.

Ons kan belangrike eienskappe uit die gevestigde teorie [2] uiteensit. Dít is nuttig vir verdere begrip. Eienskappe wat hier benut word, sluit in:

1. Die operatore L_n is

- (a) *Sintoen*, sodat $y \geq x \Rightarrow L_n(y) \geq L_n(x)$.
- (b) *Variansie-behoudend*, sodat $T(L_n \mathbf{x}) + T(I - L_n \mathbf{x}) = T(\mathbf{x})$, waar $T(\mathbf{x}) \equiv \sum_0^{N+1} |x_i - x_{i-1}|$ die totale variansie is. Dus is $T(r^n) = \frac{2}{n} \|r^n\|_1$.

2. (a) Die resolusiere r^n het die vorm van konstante blokke van positiewe hoogte en breedte n , geskei deur nie minder as n nul waardes tussen in. Dit sal ons weer soos volg bewys

- (b) $T(L_N(\mathbf{x})) = 0$, omdat ons 'n ry $\bar{\mathbf{x}}$ as 'n blok van hoogte $\sup \mathbf{x}$ kon neem, en as gevolg van $L_n(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, het ons $L_n(\mathbf{x}) = 0$ omdat $x_i \leq \bar{x}$. Dit bewys dat $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N r^i$ en $T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N T(r^i)$.

- (c) Die oorspronklike ry het hoogstens $N + 1$ verskille tussen aangrensende waardes x_i en x_{i+1} . Met elke blok wat 'n gladstryker L_n afstroop, word ten minste een van sodanige verskille verwyder. Die laaste blok verwyder twee sulke verskille. Die totale aantal pulse in al die resolusiere kan dus nie meer as N wees nie. Deur in ag te neem dat elke resolusiere r^i uit positiewe pulse bestaan, geskei deur afdelings van ten minste i nulle, kan ons elke r^i in sekere rye α_j opdeel wat enkel positiewe pulse is sodat $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^M \alpha_j b_j$, met b_j pulse, $\alpha_j > 0$ en $M < N$.

Duidelik beslaan die b_j 'n subruimte van $\mathbf{X}$, wat gekies is uit al die moontlike ander subruimtes deur die besondere rye $\mathbf{x}$ tesame met die gekose ontbindingsprosedure. Ons beskou dit as verhelderend en nuttig om die L-ontbinding as 'n transform te verstaan, al is dit nie lineêr nie en dus nie 'n transformasie in die sin van lineêre algebra nie.

Indien ons $\mathbf{x}$ beskou as die vektor van koëffisiënte t.o.v. die kanoniese basis vir $\mathbf{X}$, het ons elke resolusielag uitgedruk in terme van 'n koëffisiëntvektor $\alpha = \{\alpha_j : 1 \leq j \leq M\}$ t.o.v. die basis $B = \{b_j : 1 \leq j \leq M\}$, gekies deur $\mathbf{x}$ en die ontbinding vir die resolusiere r^i .

Op hierdie punt word die belang van die “verhelderingsvermoede”, wat later bewys is om die naam verhelderingsstelling te verdien, [2] duidelik:

Dit beweer dat die afbeelding gedefinieer deur die LULU-ontledings konus-lineêr is op die keël gegenerereer deur die basis B . Dit is 'n kragtige instrument om baie nuttige eienskappe van die LULU-transformasies te bewys, soos ons beoog om op die gekose L-transform aan te toon.

- (d) Vir digitale steekproewe en transmissie word afrondingsoperatore R en afkappingsoperatore T dikwels toegepas. Daar is vasgestel dat sulke operatore idempotent, buurorde bewarend is, en met LULU-operatore kommuteer. [2]

Die doel van hierdie artikel is om toepassings en voordele van die L-transformasie aan te bied.

2. Die belangrikheid van multiresolusie-ontleding

Dalk is die eerste betekenisvolle multiresolusie-ontleding (MRO) in ons geskiedenis die “versyfering” of digitalisering van 'n musikale komposisie. 'n Komponis teken sy ervaring van 'n stel lugdrukvariasies aan deur 'n stel instrumente te kies en die versyferde frekwensies en tydsduur op te teken. Dit sluit duidelik benaderings in op baie kenmerke, soos byvoorbeeld note wat op verskeie instrumente teen verskillende tempo's wegsterf en oortone wat weggelaat word, behalwe vir die kenmerkende samewerking van spesifieke instrumente.

Die idee is onderliggend aan 'n vereenvoudigde begrip van digitaal opgeneemde musiek. 'n Goedkoop, klein, vinnige, hoëresolusie skyf doen 'n vinnige Fourier-transform (FFT) op 'n sein van 'n druksensor. Na geskikte verraming [E: windowing], afkapping, afronding en selektiewe skeiding

van hoë- en lae-frekwensies, kan 'n benadering gerekonstrueer word vir die lugdrukvariasies op die menslike oor wat nodig is vir 'n herkenbare ervaring. Die veralgemening van hierdie begrip is nuttig in baie soortgelyke probleme van ontleding, wat lei tot die dikwels genoemde opinie dat die FFT die kragtigste wiskundige instrument van die twintigste eeu is.

Ten spyte van die wydverspreide toepaslikheid, waar selfs divergerende Fourier-rye betekenisvolle sin kan maak, beperk 'n fundamentele beperking die toepaslikheid: Die Heisenberg-onsekerheidsbeginsel is streng, en tyd- en frekwensievensters beperk mekaar. Kort ruis het 'n wye frekwensiewydte, en enkele note het oneindige tydvensters! Dit beheer en beperk selfs die gebruik van golfies in ontleding, veral in die berging en transmissie van visuele beelde. [1]

Multiresolusie-ontleding en -ontbinding met Golfies kan beskou word as 'n belowende, en nuttige veralgemening van Fourier-ontleding. Met diadiese latfunksiegolfies, konstrueer ons lokale latfunksies met geassosieerde frekwensie-inhoud, en beeld 'n gegewe latfunksie lineêr af op die koëffisiëntvektor t.o.v. 'n basis van sulke latfunksies. Die helfte van hierdie gekose basis is die fundamentele plaaslike golfies, en die res is diadiese gedilateerde weergawes van die fundamentele partisie. Hier lê 'n kardinale probleem: waar word dié laeresolusie golfies gekies om geleë te wees? Dit veroorsaak die faseprobleem.

In sy uitstekende reeks lesings in die seminaar by Stellenbosch Universiteit, het Charles Chui herhaaldelik gewaarsku teen buitensporige verwagtinge, deur te verwys na "die faseprobleem". Ons sal hard herinner word wanneer ons die MRO vergelyk met die L-dekomposisie, met die Haar-golfiedekomposisie. Die golfie-dekomposisie is *nie lokaliteit bewarend nie*: 'n Enkele beduidende lokale kenmerk kan arbitrêr wyd gesmeer word wanneer sommige resolusievlakke weggelaat word. Veral die gewoonlik belangrike rande van strukture kan maklik afgeskaaf word wanneer daar bespaar word vir berging en transmissie. Gladstrykergolfies mag dus ook die "Gibbs-verskynsel" toon wanneer sommige resolusie-komponente weggelaat word. Ons doel is om betekenisvolle voordele van MRO met L-ontbindings uiteen te sit.

Hierdie waarnemings word betekenisvol in hierdie tydperk, waar die primêre sensors wat 'n steekproefry x genereer, 'n resolusie het wat baie meer is as wat nodig is vir die spesifieke betrokke taak. Toe LULU-teorie ontwikkel is, het 'n vastetoestandgiroskoop miljoene gekos, en deesdae is dit teen lae koste verkrygbaar in speelgoed. Dit is kenmerkend van baie sensors wat tans goedkoop beskikbaar is. Die resolusie en steekproeffrekwensie kan so oortollig wees dat "desimerende operatore" dikwels gebruik is. Hierdie verwerp eenvoudig alle steekproewe behalwe, byvoorbeeld, elke duisendste. Ons eenvoudige selfoonkameras is goedkoop en het opmerklik hoër resolusie as wat meesal nodig is.

Sodanige gebruik is van die aard waar LULU-ontbinding opmerklike nuttige toepassings mag hê.

3. 'n Eenvoudige profieldekomposisie

Ons oorweeg die profiel van 'n eenvoudige muur gemaak van *Lego*-blokke op 'n tafel, en streef daarna om dit te herkonstrueer met so min stene as moontlik, vanaf 'n foto van hoë resolusie wat daarvan geneem is. Die doel kan wees om dit te berg of versend met heeltalle, en so ekonomies as moontlik. Ons het "gekwantifiseer" deur hoogtes van heeltalwaardes van 'n steenhoogte te hê sodat metings veelvoude is van die steenhoogte, en nie meer as die eerste H heeltalle nodig is nie.

Ons kan die *Lego*-muur in Figuur 1(b) voorstel met hoogtes van die histogram. Ons benodig 18 heeltalle om dit te berg of te versend soos ooreengekom.

Met groot oorsteekproefneming van die profiel kan die laaste idee verreweg wen.

As die hoërresolusieblokke weggelaat word, sal dit 'n eenvoudiger histogram gee wat deur slegs agt heeltalle voorgestel kan word, aangesien enigteen die muur van *Lego*-blokkies daarmee kan

rekonstrueer.

Voorlopig ignoreer ons probleme van bygevoegde sensorruis, hetsy Gaussies, gelykmatig, impulsief, of weens afronding, kwantifisering, drempelwaardes, ens. Ons spreek eerstens die algoritme van die MRO aan om die konstruksie met minder stene te doen, vanaf 'n groot profielmonster van N metings. Optimisties stel ons die L -algoritme voor en ontwerp 'n bergings- en transmissieplan daar rondom. Bewese LULU-teorie is beskikbaar maar hier kan ons vereenvoudig deur die L -dekomposisie te gebruik.

As $\mathbf{x}$ die opeenvolging van heeltalhoogtes van die histogram is, is dit eenvoudig om te verifieer:

- Die oppervlakte van die histogram $A = \sum_{i=1}^{18} x_i$.
- Die totale variansie $T(\mathbf{x})$ is die som van die totale variansies van die vyf resolušievlakke.
- Elke gladstryking is verskilreducerend en behou die buurorde ten volle.

Sommige vrae is relevant: Wanneer is die Lebesgue-vorm meer ekonomies as die Riemann-vorm? Hoe goed is die benaderings wat voortspruit uit die weglaat van hoë-resolušie vlakke? Hoe hanteer die MRO opgeplakte Gaussiese ruis.

4. Die ruislose geval

Eenvoudige berekening met die histogram van Figuur 1(a) en die dekomposisie wat ooreenstem met Figuur 1(c), lewer slegs vyf resolušievlakke met 'n totaal van 10 blokpulse. Dit is maklik om jouself te oortuig dat die getal 10 minimaal is. Waar die 18 heeltalle nodig is om die oorspronklike histogram te berg/versend, het ons nou slegs 10 heeltalle nodig om die hoogtes van die blokpulse aan te dui. Die nadeel is dat ons ook 10 heeltalle moet oordra om die ligging van die blokpulse van die eerste vyf resolušievlakke te spesifiseer. Die besparing verbeter egter beduidend namate N toeneem met groot oorsteekproefneming. Veral wanneer die hoë resolušievlakke weglaatbaar is.

Definisie 4.1. 'n Blokpuls $b = b_{ij}$ is 'n ry met konstante positiewe waardes by indekse $j, j + 1, \dots, j + i - 1$, en nulle elders. Sy steungebied is die indeksinterval $[j, j + i - 1]$, en sy wydte is i . Vir die doeleindes van hierdie artikel is hulle positief, en $x_i = 0$ vir $i \notin [1, N]$.

Stelling 4.1. Gegee 'n ry $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ in die L -ontbinding van $\mathbf{x}$. Dan is $\mathbf{r}^i = (I - L_i)L_{i-1}(\mathbf{x})$ 'n ry wat blokpulse van wydte i bevat, met ten minste een waarde nul tussen elke twee.

Bewys. Laat $\mathbf{z} = L_{i-1}(\mathbf{x})$ en z_j enige positiewe waarde van $\mathbf{z}$. Dan is z_j deel van 'n blokpuls van wydte $k \geq i$ omdat enige opwaartse puls wat z_j bevat en wydte kleiner as i het, verwyder sou word deur L_{i-1} . As $k > i$ sou L_i die waarde behou en $(I - L_i)\mathbf{x}$ nul wees by indeks j . Gestel dus die blokpuls se steungebied is $[k, k + i - 1]$ dan moet z_{k-1} en z_{k+1} beide kleiner wees as z_i se waarde omdat die blokpuls se hoogte gegee word deur $z_j - \max\{z_{k-1}, z_{k+1}\} > 0$. Punte van $\mathbf{z}$ wat kleiner is as 'n buurelement kan nie deur L_i verwyder word nie, sodat dit nie 'n element van 'n ander blokpuls van $\mathbf{r}^i$ kan wees nie. $\square$

Opmerking 4.1. Verskillende blokpulse van dieselfde resolušievlak $\mathbf{r}^i$ is dus ortogonaal op mekaar, of disjunk.

Opmerking 4.2. $L_i\mathbf{z}$ bevat 'n konstante gebied van wydte ten minste $i + 1$ aangesien $L_i\mathbf{z}$ konstant is in die interval $[k, k + i - 1]$, wat die steungebied van die verwyderde puls is, en die konstante waarde is ook gelyk aan z_{k-1} of z_{k+1} . As die konstante waarde van hierdie wydte nul is, noem ons die laaste verwyderde pulse 'n basispuls, en as dit positief is sal dit met verdere ontbinding deel vorm van 'n wyer blokpuls waarvan die steungebied $[k, k + i - 1]$ bevat. So 'n blokpuls noem ons 'n ondersteunende blokpuls vir die verwyderde een op die interval $[k, k + i - 1]$.

Wanneer 'n ondersteunende blokpuls nog 'n ander blokpuls ondersteun noem ons dit 'n **gemeenskaplike basispuls**.

As ons 'n stel blokpulse het wat mekaar ondersteun tot op 'n basispunt, of 'n gemeenskaplike basisblok, dan noem ons so 'n stel 'n **stapel** blokpulse.

Dit is duidelik dat die L -ontleding blokpulse van bo na onder opeenvolgend afkap van ondersteunende blokpulse. Dit is verder duidelik dat as die steungebied die indeksinterval $[i, i + k]$ het, dan sou die kanoniese vorm $k + 1$ enkelblokpulse nodig hê, terwyl die aantal blokpulse hoogstens $k + 1$ is. As daar identiese hoogtes voorkom in 'n stapel sal minder as $k + 1$ blokpulse benodig word. Waar gemeenskaplike basispuls betrokke is, is verdere besparing te sien. Ons laat dit as uitdaging aan die leser oor om oortuigende argumente te vind dat die Lebesgue-vorm minimaal is.

Stelling 4.2. $\{b_{ij}\}$ is 'n basis vir 'n subruimte van X .

Bewys. Laat $O = \sum_{i,j} \beta_{ij} b_{ij}$, die nulry in X . Beginnende van die laagste resolusievlak $n \in [1, N]$ waar daar 'n nienulwaarde β_{ij} is. Die blokpuls b_{nj} se steungebied bevat ten minste een maksimum m wat nie in die steungebied is van enige blokpuls van hoër resolusieblokpulse wat in 'n stapel deur b_{nj} ondersteun word. As die lineêre kombinasie $\sum_{i,j} \beta_{ij} b_{ij}$ nul gee by alle indekse moet $\beta_{ij} = 0$ wees. Dit is teenstrydig met die aanname dat β_{nj} nie nul is nie.

Dus is die blokpulse lineêr onafhanklik van mekaar, en is die L -ontbinding van enige ry $\mathbf{x} \in X$ die unieke lineêre kombinasie van die basispuls wat $\mathbf{x}$ gee. $\square$

Dit is verhelderend om na te dink oor die uitwerking van hierdie idees met moderne sensore. Ons kry dikwels massiewe oorsteekproefneming as gevolg van die gebruik van goedkoop beskikbare standaard sensore. By steekproefneming gebruik ons soms selfs “Desimeringsoperatore” wat eenvoudig alles behalwe elke n -de meting verwyder om slegs “essensiële” kenmerke te verwerk. 'n Doel van MRD is presies die wyser uitskakeling van oortollige data, waar ons ook die seleksie van 'n bepaalde relevante deel van die resolusievlakke kan motiveer, sê $s = \sum_{i=\ell}^m r^i$, vir $\ell, m \in [1, N]$.

Ons stelling waarborg dan dat die deelry reeds ontbind is in die oorblywende MRD-komponente. Ons kan ook dié gedeelte met $\alpha_i \geq 1$ “beklemtoon” om $s = \sum_{i=\ell}^m \alpha_i r^i$ te kry, met vormkonsekwentheid.

As 'n voorbeeld kan ons die identifikasie van 'n fort op 'n horison oorweeg uit sy kimprofiel. Daar is lukrake versteurings op die hoë resolusievlakke as gevolg van lukrake ruis van ligbuiging in die atmosfeerfluktueringe en kamoeferingsdetail. Die laer resolusievlakke kan hoofsaaklik afkomstig wees van die plaaslike topografie van die voorgrond. Ons kan dan ons identifikasiepatroon vereenvoudig deur die laer- en hoërresolusievlakke weg te laat. Hierdie voorbeeld wys dat ons ons identifikasieprobleem verder kan vereenvoudig deur slegs 'n subseksie van ons ry $\mathbf{x}$ te oorweeg, sê byvoorbeeld die element $x_i \in [\ell, m] \subset [1, N]$.

Dit motiveer ons om 'n “beklemtoningshipotese” te bewys, soos in die monografie oor Luluteorie [2], en wat later bewys is vir die MRD met LU en UL -operatore.

Ons verlang dus 'n uitgebreide analogie vir die besondere L -ontbinding wat ondersoek word, en streef ook daarna om 'n meer verhelderende argument te kry vir die “beklemtoningshipotese” in die besondere L -ontbinding onder bespreking.

Stelling 4.3. Gegewe 'n MRD van 'n vektor $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \in \mathbb{R}^N$, in die resolusie-komponente $r^j = (I - L_j)L_{j-1}\mathbf{x}$. Die ry r^j bestaan uit individuele blokimpulsies b_{ij} wat positiewe veelvoude is van eenheidspulse van die vorm $b_m = \sum_{k=m}^{m+i-1} \delta_{mk}$, waar δ_{mk} die Kronecker- δ is, en sodanige impuls word deur minstens i nulle geskei. As enige enkele impuls met 'n nienegatiewe konstante α versterk word, dan word die gewysigde ry van somme konsekwent ontbind.

Bewys. Laat $\mathbf{x} = \sum_{i,j} b_{ij}$, met b_{ij} die blokpuls met hoogte b op die interval $I = \{j, j + 1, \dots, j +$

$i - 1\}$ wees. Gestel nou dat die puls b_{mn} vervang word met αb_{mn} en $\alpha \geq 0$. Sy hoogte is nou $\alpha b \geq 0$. Kies nou die ry $\mathbf{z}$ soos volg,

$$z_i = \begin{cases} x_i + (\alpha - 1)b, & \text{vir } i \in I = \{n, n+1, \dots, n+m-1\}, \\ x_i, & \text{vir } i \notin I. \end{cases}$$

Die blokpuls het ontstaan uit $L_{m-1}x_j - \text{maks}\{L_{m-1}x_{n-1}, L_{m-1}x_{n+m}\}$, met $L_{m-1}x_j = L_{m-1}x_n$ vir $j \in I$.

Beskou nou die dekomposisie van $\mathbf{z}$.

Omdat die operatore buurordebehoudend is en $L_i \geq L_{i-1}$ vir alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, volg dat $z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+m-1} \geq \text{maks}\{x_{n-1}, x_{n+m}\}$, omdat $L_0\mathbf{z} = \mathbf{z} \geq L_{m-1}\mathbf{z} \geq L_m\mathbf{x}$.

Eerstens is $(L_1\mathbf{z})_j = \text{maks}\{\min\{z_{j-1}, z_j\}, \min\{z_j, z_{j+1}\}\}$, en as $j \in I = \{n, n+1, \dots, n+m-1\}$ is al die minima betrokke bepaal deur waardes met indekse binne I , tensy z_{j-1} en z_{j+1} beide buite I is.

Hierdie geval is net moontlik as $m = 1$, en wanneer dus

$$(I - L_1)z_j = z_j - L_1z_j = x_j + (\alpha - 1)b_j \text{maks}\{z_{j-1}, z_{j+1}\} = b + (\alpha - 1)b = \alpha b.$$

In hierdie geval is $L_1\mathbf{z} = L_1\mathbf{x}$ omdat $L_1z_{j-1} = L_1x_{j-1}$ en $L_{j+1}z = L_1x_{j+1}$ omdat pulse nie langs mekaar kan wees nie, en alle ander waardes L_1z_j net uit waardes waar $z_i = x_i$ ontstaan, omdat i dan op indekse buite $\{j-1, j, j+1\}$ ontstaan. Die res van die L -dekomposisie is dus soortgelyk aan die dekomposisie van $\mathbf{x}$, en die ry $\mathbf{z}$ word konsekwent dekomponeer.

Ons neem dus aan dat $m > 1$.

Met $j, j-1 \in I$ is

$$\begin{aligned} L_1z_j &= \text{maks}\{\min\{z_{j-1}, z_j\}, \min\{z_j, z_{j+1}\}\} = \min\{z_{j-1}, z_j\}, \\ &= \min\{x_{j-1} + (\alpha - 1)b, x_j + (\alpha - 1)b\} = L_1x_j + (\alpha - 1)b. \end{aligned}$$

As $j, j+1 \in I$ volg soortgelyk dat $L_1z_j = L_1x_j + (\alpha - 1)b$.

As $j \notin I$ is $L_1z_j = Lx_j$ vir $j = n+m$ of $j = n \pm m - 1$. Dit is omdat $\min\{z_{n+m}, z_{n+m-1}\} = z_{n+m} = x_{n+m}$ en $\min\{z_{n-1}, z_n\} = z_{n-1} = x_{n-1}$.

By ander waardes waar $j \notin I$ is alle waardes van $\mathbf{z}$ betrokke by L_1z_j se berekening gelyk aan die ooreenkomstige waardes van $\mathbf{x}$ sodat $L_1z_j = L_1x_j$.

Laat nou $1 < i < m$.

Dan is $L_i z_j = \text{maks}\{\min\{\ell_{j-i}, \dots, \ell_j\}, \min\{\ell_{j-i+1}, \dots, \ell_{j+1}\}, \dots, \min\{\ell_j, \ell_{j+1}, \dots, \ell_{j+i}\}\}$, waar $\ell_k = (L_{i-1}\mathbf{z})_k = (L_{i-1}\mathbf{x})_k + (\alpha - 1)b$.

As $j \in I$ is geen van die minima groter as diesulkes wat net waardes met indeks in I bevat, omdat al die ander waardes bevat met indekse buite I , en dus $z_{n-1} = x_{n-1} \leq x_j$ en $z_{n+m} = x_{n+m} \leq x_j$ ook.

Dan is $(L_i\mathbf{z})_j = (L_{i-1}\mathbf{x})_j + (\alpha - 1)b$ en $(I - L_i)z_j = (I - L_i)x_j$.

As $j \notin I$ word geen van die minima verander as waardes $z_i \neq x_i$ vervang word met x_i , want sulke intervalle bevat $z_{n-1} = x_{n-1} \leq x_j$ of $z_{n+m} = x_{n+m} \leq x_j$. Dus is $(L_i\mathbf{z})_j = (L_i\mathbf{x})_j + (\alpha - 1)b$ en $(I - L_i)z_j = (I - L_i)x_j$.

Met die gewone induksie-argument geld nou ook dat:

$$(L_{m-1}\mathbf{z})_j = (L_{m-1}\mathbf{x})_j + (\alpha - 1)b \text{ as } j \in I \text{ en } (L_{m-1}\mathbf{z})_j = (L_{m-1}\mathbf{x})_j \text{ andersins.}$$

Vir $i = m$ geld nou dat $(L_m\mathbf{z})_j = \text{maks}\{(L_{m-1}\mathbf{x})_{n-1}, (L_{m-1}\mathbf{x})_{n+m}\} = (L_m\mathbf{x})_j$, vir alle $j \in I$.

Met soortgelyke argumente vir die geval van $m - 1$, is $(L_m\mathbf{z})_j = (L_m\mathbf{x})_j$ vir $j \notin I$, sodat algemeen volg dat $L_m\mathbf{z} = L_m\mathbf{x}$, en verdere resoluusievlakke van $\mathbf{z}$ identies is aan die van $\mathbf{x}$.

Deur alle blokpulse van z wat identies is aan diesulkes van $\mathbf{x}$ af te trek, is dit duidelik dat die blokpuls by die interval $[n, n+m-1]$ die puls αb_{nm} is. Dit word ook direk bevestig deurdat $(L_m z)_j = (L_m \mathbf{x})_j$ vir $j \in I$, sodat $(I - L_m)L_{m-1}z_j = (L_{m-1}z)_j - (L_m \mathbf{x})_j = (L_{m-1} \mathbf{x})_j + (\alpha - 1)b - ((L_{m-1} \mathbf{x})_j - b) = \alpha b$. $\square$

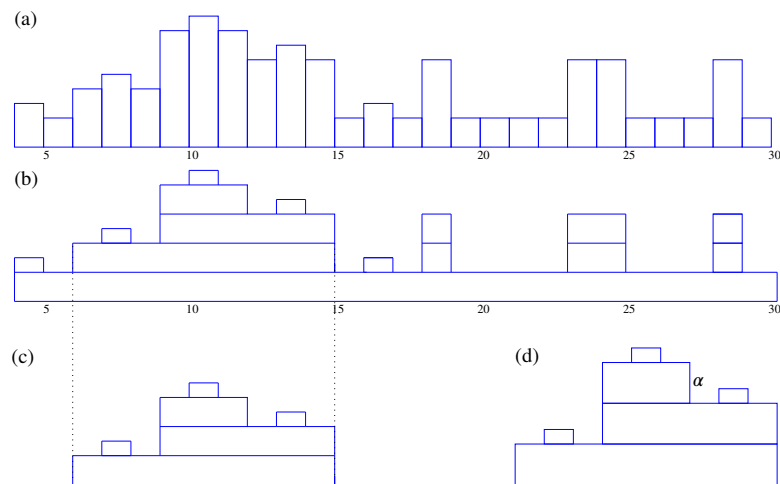
Deur op te merk dat die som van alle blokipulse in die verskillende resolušievlakke nie meer as N is nie, kan ons elke een van hierdie een-vir-een wysig met 'n gekose α en die gevolglike ontbinding van die gewysigde ry handhaaf. Ons kan daarom die volgende gevolgtrekking maak, wat die “beklemtoningstelling” vir die besondere L -ontbinding is:

Gevolgstelling Laat $z = \sum_{i,k}^N \alpha_{ik} b_{ik}$, met $\alpha_{ik} \geq 0$, waar b_{ik} die blokipulse is wat betrokke is by die L -ontbinding van 'n ry $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Dan is die ontbinding van z konsekwent.

Dit is gerieflik vir die doel van die beklemtoning op 'n horisontale vlak om op te merk dat sommige impulse deur ander ondersteun word en sommige impulse ander ondersteun. Dit is omdat elke resolušievlak $r^n \in \text{bestek}(L_{n-1})$ is en ondersteun word deur 'n konstante gebied, wat 'n wyer puls van 'n laer vlak of die nulry kan wees. Geen twee impulse oorvleuel gedeeltelik nie.

As ons 'n gedeelte van 'n ry wil beklemtoon, byvoorbeeld $[\ell, m] \subset [1, N]$, kan ons eenvoudig die hoogste resolušiepuls vind wat nienul is op hierdie deel en al die impulse wat dit ondersteun versterk, of impulse verwyder wat onder of buite hierdie gebied lê.

Die L -MRD-ontbinding is weer konsekwent.



Figuur 3. Die histogram (a) as 'n stel vertikale blokke, (b) as stel horisontale blokke, (c) as 'n gereduseerde stapel, en (d) as 'n verhelderde stapel

Figuur 3 illustreer die beklemtoning van 'n beduidende gedeelte.

5. Gevolgtrekkings

Dit is insiggewend om die Riemann- en Lebesgue-voorstellings van 'n profiel vir die getal blokpulse te ondersoek, waar dit duidelik word dat die Lebesgue-weergawe meesal voordele het. Ons poog nie om algemeen te vergelyk nie. Die rede is dat die geval van 'n monotoon stygende ry toon dat daar ewe veel blokke betrokke kan wees. Wat moontlik deurslaggewend is, volg uit die ervaring van baie spesifieke tipe profile, waar die geringe aantal blokpulse wat die L -dekomposisie gee baie nuttig is.

As voorbeeld kan die ry van H gekwantifiseerde intensiteite van een ry van 'n beeldskerm met N elemente wees. Wanneer daar beduidende strukture teen 'n redelik uniforme lokale agtergrond is, sal die Lebesgue-vorm dikwels groot voordeel in lae aantal pulse oplewer, veral waar N heelwat groter as H is. By moderne TV-skermformate is daar byvoorbeeld 3840 rye stippels en 2169 kolomme, of dubbeld soveel. H stippelintensiteite word soms alternerend bygewerk om bandwydte te bespaar. Vol HD kan H tot $2^8 = 256$ gebruik in elk van drie kleure.

Vir elke lyn kan die Lebesgue-vorm dus hoogstens H blokke bevat, of selfs baie minder omdat die aantal verskillende intensiteite aansienlik kleiner as H kan wees in tipiese beelde.

Wanneer die agtergrond van 'n beeld, byvoorbeeld die veld by 'n rugbywedstryd, nie heeltemal eenvormig is, kan dit vervang word met 'n gegenereerde tipiese "tekstuur" deur gemiddelde en standaardafwyking te skat. Dit lewer groot besparing, en die beduidende lokale strukture kan dan met beter resolusie weergegee word, en ook opgehelder word.

Dit is hier waar die toepaslike eienskappe van die L-dekomposisies se voordeel kreatief benut kan word, in verskeie toepassings waar bandwydte deur realiteite beperk word.

Vektorprosessering kan verdere ekonomiese berging/versending van 'n $N \times M$ matriks van waardes x_{ij} moontlik gelyktydig maak deur die L-dekomposisie van elke ry-vektor met dieselfde algoritme. Dit lewer 'n M -voudige tydbepaling met die gegewe algoritme. Moontlik is dit soortgelyk aan wat die retina van 'n oog doen met lae neurone.

Die algoritme wat direk op die definisie van die L -operator gebaseer is, kan verder ekonomies geïmplementeer word deur die $N - 1$ maksima

$$(\bigwedge \mathbf{x})_i = \max\{x_{i-1}, x_i\} \text{ vir } i = 1 \text{ tot } N + 1 \text{ te bereken,}$$

en daaropenvolgens $(\bigwedge^2 \mathbf{x})_i, (\bigwedge^3 \mathbf{x})_i, \dots, (\bigwedge^N \mathbf{x})_i$ vir dieselfde indekse, deur

$$\begin{aligned} (\bigwedge^{k+1} \mathbf{x})_i &= \min\{\bigwedge^k x_{i-k}, \bigwedge^k x_{i-k+1}, \dots, \bigwedge^k x_i\}, \\ &= \min\{\bigwedge^k L_k x_{i-k}, \bigwedge^k L_k x_i\}, \end{aligned}$$

weens die Galois-verband $\bigwedge^k \bigvee^k \bigwedge^k = \bigwedge^k$, en die feit dat L_{k2} nie 'n puls van wydte k kan hê nie. Met die keuse van $x_i = 0$ vir $i \in [1, \dots, N]$ benodig dit net die berekening van $N - 1$ minima vir elke k . Dit gee 'n totaal van $(N - 1)(N - 2)$ minima, omdat $\bigwedge^N \mathbf{x} = 0$. Dit laat die berekening van $\bigvee^k$ oor vir al die rye $\bigwedge^{k+1} \mathbf{x}$. Hier mag ook groter besparings beskikbaar wees soos vir die algemene LULU-dekomposisies, maar ons wil graag die vektorverwerking op alle rye behou in die geval van 'n $N \times M$ matriks se ryontbindings.

Die skrywers ondersoek tans die oënskynlike groei in kompleksiteit. Ons is oortuig dat hierdie artikel, met sy visuele analogie met 'n *Lego*-muur se konstruksie, genoegsame inspirasie kan verskaf vir kreatiewe aanwending in verskeie tegnologietoepassings.

Verwysings

- [1] Charles K. Chui. *An introduction to wavelets*. Academic Press, Londen, 1992.
- [2] Carl Rohwer. *Nonlinear smoothing and multiresolution analysis*. Birkhäuser Verlag, Berlyn, 2005.
- [3] Carl Rohwer. The estimation of moments of an unknown distribution in the discrete pulse transform. *Num. Alg.*, 45:239–251, 2007.
- [4] Halsey L. Royden. *Real analysis*. Collier MacMillan, 1988. Internasionale uitgawe.