Cantor met sy oneindige aantal punte met nul maat – nul is nie niks nie

Pieta van Deventer

Trefwoorde: kardinaalgetal, versameling, drieledige versameling, aftelbaar, onaftelbaar, limiet, maat, Lebesgue-integrasie, ZFC

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) was ’n Duitse wiskundige wat versamelingsleer, groot getalle of liewer groot kardinaalgetalle, en verskeie ander vreemdsoortige wiskundige dinge ondersoek het. Sommige van sy maaksels was só vreemd en het vir die mens se intuïtiewe aanvoeling so teenstrydig voorgekom dat daar steeds wiskundiges is wat van sy ontwikkelings bevraagteken en dit lei steeds tot ywerige navorsing. Ons het reeds vroeër met hom kennis gemaak met die kardinaalgetalle $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$ asook c, waar laasgenoemde na die kontinuum-kardinaalgetal verwys, naamlik die hipotetiese kardinaalgetal tussen $\aleph_0$ en $\aleph_1$.[1,2] (Indien u as leser die bestaan van c kan BEWYS, is u wêreldberoemd, aangesien dit een van Hilbert se probleme is.[3]) Enkele van hierdie gedagtes gaan net vlugtig hier herhaal word voordat ons een van sy besonder vreemde, maar op die ou einde baie nuttige skeppings gaan bespreek. Die proses bestaan uit twee afdelings en saam lei dit tot ’n verstommende resultaat.

Dit is nie moeilik om aan te toon dat die versameling van reële getalle Z onaftelbaar met kardinaalgetal $\aleph_1$ is nie. Dít teenoor die kardinaalgetal van die versameling van aftelbare natuurlike getalle N, naamlik $\aleph_0$. Trouens, die afleidings is volledig in [1] getoon.

Gaan nou ’n stappie verder. Die sogenaamde Cantor-versameling ontstaan nou soos volg:[4]

Beskou ’n geslote lynstuk [0,1]. Volg dan die volgende stappe: Haal die middelste derde oop interval uit hierdie [0,1] interval, naamlik $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Wat van die oorspronklike interval oorbly, is die saamgevoegde vereniging van geslote intervalle wat as versamelings voorgestel word, naamlik $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Let op die gebruik van [,] om ’n interval aan te toon wat die eindpunte insluit en dus geslote is teenoor die gebruik van (,) om ’n interval aan te toon wat nie die eindpunte insluit nie, naamlik ’n oop interval. Benoem nou die betrokke versamelings soos volg:

$$K_0 = [0,1]$$

$$K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

[1] https://www.litnet.co.za/wp-content/uploads/2020/04/Cantor-getalle-Pieta-van-Deventer.pdf
[2] https://www.litnet.co.za/wp-content/uploads/2020/04/Cantorgetalle_deel_twee_PvD.pdf
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert%27s_problems
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set

Volg nou dieselfde prosedure deur die middelste derde oop interval van elk van die komponente van K_1 te verwyder, naamlik $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ en $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$, sodat wat oorbly deur

$$\begin{aligned} K_3 &= \left[0,\frac{3}{27}\right]\cup\left[\frac{6}{27},\frac{9}{27}\right]\cup\left[\frac{18}{27},\frac{21}{27}\right]\cup\left[\frac{24}{27},1\right] \\ &= \left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right] \end{aligned}$$

gegee word. Herhaal nou die proses op elk van die komponente in K_3 en herhaal hierdie proses keer-op-keer. Verwyder net elke keer die middelste derde van elk van die nuwe oorblywende intervalkomponente. Dit lyk en is numeries nie moeilik nie, maar probeer gerus self om die volgende twee stappe te voltooi deur K_4 en K_5 te skep. Dis nogal lastig as ’n mens nie suiwer en baie rustig sistematies dink nie. Interessant genoeg vind ’n mens dat eenvoudige patrone en formules gou na vore kom. As u nou self probeer het, kan u verder lees hoe dit op baie ’n uitgebreide, maar eenvoudige wyse verskyn. In u volgende stap sal die aanvanklike noemer deurgaans 81 wees en in die volgende stap 243, ensovoorts. Dit wil sê magte van 3. In plaas daarvan om die breuke dadelik te vereenvoudig, behou die onvereenvoudigde breuke. Sodoende kom die formules waarmee elke volgende wegraping plaasvind, direk na vore. Die resultaat staan as Cantor se drieledige (ternary) versameling bekend.

Indien hierdie proses nou eindeloos herhaal word, bevat Cantor se drieledige versameling al die punte in die interval [0,1] wat nie deur die proses verwyder is nie, en daar is baie.

Deur die stappe te ontleed, kom ’n mens gou agter dat ná *n* stappe daar 2^{n-1} intervalle van lengte $\frac{1}{3^n}$ elk per stap verwyder word. Kontroleer gerus hierdie bewering. Dis insiggewend, alhoewel nogal frustrerend om die stappe self deur te werk omdat ’n mens so maklik ’n eenvoudige fout kan maak. Ná stap 1 hierbo, is ’n interval van lengte $\frac{1}{3}$ verwyder. Ná stap twee hierbo word twee intervalle van lengte $\frac{1}{3^2}$ elk verwyder. Dit beteken dat as ek nou die gesamentlike lengte van ál die oop intervalle wat verwyder word, bereken, dit gelyk is aan 2^{n-1} intervalle van lengte $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ elk oor alle waardes van $n=1,2,3,\ldots$, dit wil sê ’n totale lengte van $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}$. Gevolglik is die oorblywende gedeelte van die interval [0,1] aangedui deur $m(K)$ gelyk aan:

$$
\begin{aligned}
m(K) &= 1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n} \\
&= 1-\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} \\
&= 1-\frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\ldots\right) \\
&= 1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Die *m* staan vir die sogenaamde maat[5] van die versameling *K*. U hoef u nie te bekommer oor die begrip van die *maat* of in leketaal grootte nie. Dis egter 'n uiters belangrike begrip in die vertakking van wiskunde bekend as maat- en integrasieteorie, in die besonder wanneer Lebesgue-integrale ter sprake kom.[6,7,8]

Kom ons dink nou 'n bietjie verder. Die limiete of grense van die oop intervalle wat verwyder word, bly almal agter in K. Hulle kom nooit in die verwyderingsproses ter sprake nie. Die versameling van limiete is aftelbaar, synde almal rasionale breuke met 'n kardinaalgetal vergelykbaar met díe van die natuurlike getalle, *N*. Dit beteken dat alhoewel $m(K)=0$, dit nog steeds 'n kardinaalgetal vir K impliseer wat bevestig dat K nie leeg is nie. Nul is dus nie niks nie! Dis egter nie al nie. Hierdie argument kan nog verder gevoer word. Met die verwydering van elke oop interval bly daar uiteindelik twee geslote intervalle agter, selfs tot op die laaste verwydering, die hoeveelste dit ook mag wees. Elkeen van hierdie intervalle verteenwoordig 'n lynstuk van minimale grootte. Verder weet ons dat lynstukke van verskillende lengtes dieselfde kardinaalgetal het – in leketaal sê ons onakkuraat genoeg dat alle lynstukke dieselfde onbeperkte aantal punte bevat. Hier praat ons nou van punte wat reëele getalle voorstel, sodat $\aleph_1$ geïmpliseer word. Dit beteken dat die kardinaalgetalle van die verwyderde gedeeltes gesamentlik dieselfde is as dié van dít wat agterbly, want dis bekend dat $\aleph_1+\aleph_1+\aleph_1+\ldots=\aleph_1$, waaruit ook volg dat $\aleph_1\times\aleph_1\times\aleph_1\times\ldots=\aleph_1$.[9] Dus het beide groeperings 'n maat van 0, maar gesamentlik vorm hulle die hele lynstuk van maat een, want $[0,1]$ se kardinaalgetal is $\aleph_1$.

As dít nie die asem wegslaan nie, dan weet ek nie. Dit is dus geensins vreemd dat Cantor se argumente nog steeds bestudeer word en dat sommige wiskundiges 'n vraagteken agter sy resultate plaas nie. Niemand kon egter nog oortuigende bewyse vind dat daar gate in sy

---

[5] Vir diegene wat meer hieroor wil weet, soek gerus onder die internetadres https://mathworld.wolfram.com/LebesgueMeasure.html . Die Wolfram opsomming is kort en kragtig. Vir meer detail is Wikipedia of https://math.gmu.edu/~dwalnut/teach/Math776/Spring11/776s11lec03_notes.pdf goeie verwysings.

[6] Spiegel Murray R. *Theory and Problems of Real Variables Lebesgue Measure and Integration*. Shaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York. 1969.

[7] Rudin Walter. *Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed.*, McGraw-Hill, New York. 1976

[8] Apostol Tom M. *Mathematical Analysis, 2nd ed*. Addison Wesley, Reading. 1974.

[9] https://www.litnet.co.za/wp-content/uploads/2020/04/Cantor-getalle-Pieta-van-Deventer.pdf

argumente is nie, benewens dat dit saam met Russell se paradokse onder andere tot die baie belangrike Zermelo Franken- of ZFC-aksiomas (C vir choice) gelei het. Hierdie aksiomas dui onder andere aan dat die kontinuumhipotese wat hierbo in paragraaf 1 genoem is, nie met die huidige beskikbare wiskunde-tegnieke bewys kan word nie, nóg dat daar ’n teenbewys daarvoor gevind kan word. Dit beteken dat wiskundiges verdere navorsing sal moet doen as hulle hierdie hipotese wil bewys of as foutief wil aantoon.

Cantor se drieledige versameling is nie ’n nuttelose resultaat nie. Hierdie argument speel ’n belangrike rol in stimulasie vir verdere navorsing soos hierbo aangetoon, asook in die ontwikkeling van waarskynlikheid-berekeningsmetodes, sonder dat die meeste statistici, aktuarisse en ingenieurs en wie anders ook van sulke berekenings gebruik maak, dit eens besef.