Wysgerige perspektiewe op die uniekheid van getal

Danie Strauss
Fakulteit Geesteswetenskappe, Universiteit van die Vrystaat

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen,
soll Niemand uns vertreiben können.
(David Hilbert 1925:170)[1]

Practicing mathematicians, consciously or not,
subscribe to some philosophy of mathematics
(if unstudied, it is usually inconsistent).
(Monk 1970:707)

Opgedra aan die nagedagtenis van prof. Ben de la Rosa
(30 Junie 1934 – 5 April 2008),
wat deurgaans my wiskundige studies verryk het met
diepsinnige gesprekke tot kort voor sy afsterwe

Abstract

Philosophical perspectives on number

"Natural" numbers succeed each other and have the potential to be extended indefinitely, that is to say "without an end". Both the infinite and the arithmetical time order of succession are features found in the transfinite arithmetic of Cantor. However, characterising mathematics as a set theory questions the nature of all earlier mathematics. The status of number is discussed in die light of the limitations of logical addition and the idea of a multiplicity of "units". Before an analysis of the numerical aspect is done, the following points of view are explored, namely that it is a function of reality that displays modal universality, that it can be (theoretically) accessed by means of modal abstraction, that "existence" does not coincide with what "can be observed by the senses", and that it cannot be defined. After discussing the question about who made numbers, the classical problem concerning uniqueness and coherence is addressed, followed by what number "borrowed" from space. In this context a succinct account is given of the new light that the distinctness and coherence between succession and simultaneity shed on the nature of infinity, particularly manifested in the mathematical use of the idea of infinite totalities (as a regulative hypothesis) and within the perspective of a reversal of the order of disclosure between number and space. When what is "borrowed" from space by number is not seen as intrinsic numerical properties, the meaning nucleus of number is "liberated" once more, without any impediment, to serve in a qualifying capacity in respect of all sets of numbers – whether designated as "discrete", "dense" or "continuous". Within the sphere of number (including

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

natural numbers, integers, rational numbers and real numbers) every number is unique in subjection to the "rule" of the discrete, as emphasised by Laugwitz.

Opsomming

Die gegewe dat die "natuurlike" getalle op mekaar volg, dui op die potensiaal om sonder einde voortgesit te word – wat vanself sowel die oneindige as die aritmetiese tydsorde van opeenvolging ten tonele voer. Hierdie fasette is verder ontgin in die transfiniete aritmetika van Cantor. Die resultaat hiervan was onder meer dat die wiskunde as versamelingsleer aangedui is – waarmee die aard van alle vroeëre wiskunde bevraagteken word. Die status van getal word bespreek in die lig van die beperkinge van logiese optelling en die idee van 'n veelheid "eenhede", alvorens oorgegaan word tot 'n ontleding van die aard van die getalsaspek aan die hand van gesigspunte soos getal se funksionele (modus-) aard, die modale universaliteit daarvan, die aard van modale abstrahering, die vraag of getalle God- of mensgemaak is, die gegewe dat "bestaan" nie met "sintuiglike waarneembaarheid" saamval nie, en die vraag of getal gedefinieer kan word. Die analise betrek die klassieke probleem van uniekheid en samehang, sowel as die funderende posisie van getal ten opsigte van ruimte en verskillende struktuurelemente van die ruimte wat implisiet deur getal by ruimte "geleen" word. In hierdie konteks word kernagtig aandag geskenk aan die nuwe lig wat die onderskeiding (en samehang) tussen suksessie en gelyktydigheid op die aard van oneindigheid werp. Dit word veral gemanifesteer in die wiskundige gebruik van oneindige totaliteite (as regulatiewe hipotese) en binne die perspektief van 'n omkering van die ontsluitingsorde tussen getal en ruimte. Wanneer dít wat deur getal by die ruimte "geleen" word nie as inherent aritmetiese eienskappe waardeer word nie, word die sin-kern van getal "bevry" om opnuut en ongestoord kwalifiserend op te tree ten opsigte van alle getalversamelings – hetsy aangedui as "diskreet", "dig" of "kontinu". Binne die sfeer van getal, soos Laugwitz tereg beklemtoon, bly elke (natuurlike, heel-, rasionale en reële) getal onder die "heerskappy" van die diskrete uniek.

[Opmerking: Die vertaling van Duitse aanhalings in Afrikaans is almal deur die outeur gedoen.]

1. Die fassinering met getal

Die mens se fassinering met die groot(s)heid van die heelal neem meestal in sy prille jeug vorm aan. Ek herinner my hoedat ek die groter kinders mekaar hoor uitdaag het om te kyk wie die verste kan tel voordat ek begin skoolgaan het. Ek het onmiddellik aan "ontelbaar" gedink en gewonder of dit die uiterste grens van die tellery verteenwoordig. En toe tref 'n idee my – en ek val kliphard met my eie alternatief in (terwyl die ander nog gewoonweg aan die tel is, want almal het by "een", "twee", "drie" en so meer begin). Om almal uit te stof, tel ek toe: "Een ontelbaar, twee ontelbaar, drie ontelbaar, ..."

In beide tel-aksies is weliswaar vasgehou aan die aard van opeenvolging. In ons alledaagse ervaring is suksessie normaalweg nie volstrek "eindeloos" nie, want meestal kan dit gekoppel word aan die besef van 'n beperkte hoeveelheid. Ons mag wonder hoeveel mense die rugbywedstryd bygewoon het, of hoeveel mense daar in Suid-Afrika of op aarde is – en telkens sal die antwoord 'n eindige hoeveelheid spesifiseer. Gevolglik onderlê die aard van opeenvolging ons besef van hoeveel(heid), want om uit te vind hoeveel van dit of dat daar is, moet getel word: een, twee, drie, en so meer. Om enige beperkte hoeveelheid vas te stel, word getel, wat eintlik ’n proses van op-tel-ling is. Een en (plus) nog een, plus nog een, en so meer. Deur aftelling word sodoende tot optelling gekom – en in die wiskundige maatteorie word besef dat wanneer ’n versameling nie aftelbaar is nie, getalsoptelling nie gedefinieer kan word nie![2]

2. ’n Verhaaltjie uit die lewe van die “prins van die wiskunde”

Pas nadat Carl Friedrich Gauss, bekend as die “prins van die wiskunde”, begin skoolgaan het, wou sy onderwyser iets doen wat ’n rukkie sou neem, en toe besluit hy om ’n probleem aan die klas te gee wat hulle lank genoeg besig sou hou (die verhaal word in Ahrens 1916 vertel). Hy vra hulle toe om die opeenvolgende ry natuurlike getalle, naamlik 1, 2, 3, en so meer, tot by 60 op te tel. Die praktyk was dat die eerste een wat klaar was, sy lei op die onderwyser se tafel moes kom neersit. Almal het net begin met hul berekenings en die onderwyser wou net met sy werk begin toe Gauss opstaan, vorentoe stap en sy lei op eersgenoemde se tafel sit. Daar was egter geen som wat gedoen is nie – net ’n enkele getal: 1 830. Sowel die onderwyser as die leerders het Gauss skepties uitgelag, maar hy was so seker van die korrektheid van sy antwoord dat almal voortgegaan het met hul optellingsopdrag om te kyk of hy reg is – en hy wás reg! Gauss het eenvoudig begin deur homself af te vra wat die som van die eerste en laaste van die getallery van 1 tot by 60 is, wat 1 + 60 = 61 is. Vervolgens: Wat is die som van die tweede en tweede laaste getalle? Dit is 2 + 59 = 61, wat beteken dat daar 30 getallepare is waarvan die som telkens 61 is. Derhalwe: 30 vermenigvuldig met 60 gee 1 800 en daarby moet dan nog die 61ste 30 getel word, wat die eindtotaal van 1 830 lewer.

Alvorens nader ingegaan word op die verhouding tussen *aftel* en *optel*, moet ons egter nog eers vir ’n oomblik stilstaan by die aard van *aftelling*.

3. Die aritmetiese orde van opeenvolging

Natuurlik is ons almal se eerste kennismaking met getal ten nouste verbonde aan ’n ervaring van die aritmetiese orde van opeenvolging van een, nog een, en nog een, en so voortgaande, sonder einde. Letterlik beteken hierdie “sonder einde” natuurlik oneindig. En in die tel-kompetisie van my prille jeug was “ontelbaar” natuurlik bloot ’n sinoniem vir “oneindig”. My gedagte was om opeenvolgende oneindighede in my kompeterende tellery te benoem, uiteraard sonder dat ek ooit op daardie stadium sou kon droom wat my fantasie ’n skamele 70 jaar gelede in Duitsland voorafgegaan het. ’n Duitse wiskundige met die naam Georg Cantor (1845-1918) het naamlik ’n teorie van meer-as-eindige getalle ontwikkel waarin daar inderdaad tussen opeenvolgende transfiniete getalle onderskei word (beide transfiniete ordinale en kardinale getalle)! Daar is nie maar bloot één oneindigheid nie – daar is verskillende oneindighede, wat, interessant genoeg, elkeen ’n eie suksessie vertoon en selfs ’n eie rekenkunde besit. Daarom word hierdie deel van Cantor se skepping verkieslik aangedui as “transfinite arithmetic”.[3]

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

4. Versamelingsleer en die "transfiniete aritmetiek" van Cantor

Elke wiskundestudent kom vandag êrens met hierdie transfiniete (méér-as-eindige) getalleleer van Cantor in aanraking, deels omdat dit by Cantor self ingebed is in sy "Mengenlehre" (versamelingsleer).[4] Cantor het die grondtrekke van hierdie nuwe en grondleggende dissipline tussen 1874 en 1899 ontwikkel en dit vorm 'n blywende erfenis waarmee wiskundiges nog steeds werk, al is dit in die vorm van geaksiomatiseerde stelsels (byvoorbeeld die aksiomatiese Zermelo-Fraenkel versamelingsleer).[5] In 1997 vermeld Maddy (1997:22) trouens dat die "opening pages of most recent textbooks" die kontemporêre ortodoksie onderskryf waarvolgens versamelingsleer die grondslag van die wiskunde vorm. Yourgrau (2005:72) merk ook op: "Even today, the axioms of Zermelo-Fraenkel's set theory are the most widely used and accepted in the field."

5. Probleme verbonde aan die idee dat die wiskunde versamelingsleer is

Talle wiskundiges gebruik soms bloot die volgende (skynbaar toepaslike en onskuldige) kernagtige aanduiding: "Die wiskunde *is* (aksiomatiese) versamelingsleer." Weliswaar beskou Hersh hierdie siening, naamlik "[m]athematics *is* axiomatic systems expressed in mathematical language", as 'n voorspelbare implikasie van 'n *wysgerige* leerstelling (Hersh 1997:41).

Vanuit 'n *historiese perspektief* word ons besinning hier terstond gekonfronteer met lastige probleemvrae. As die wiskunde aksiomatiese versamelingsleer *is*, wat gebeur dan met al die wiskunde en wiskundige insigte en resultate deur die eeue heen vóórdat die versamelingsleer ontstaan het? As wiskundige resultate bloot afleidings uit (gepostuleerde) aksiomas is, hoe is dit dan moontlik dat die resultate bereik is vóór die ontstaan van die aksiomas van die versamelingsleer? Hersh (1997:43) vra tereg: "If a theorem is only a conclusion from axioms, then do you say that Cauchy didn't know Cauchy's integral formula? Cantor didn't know Cantor's theorem?"

Ten opsigte van die stelling dat die wiskunde basies versamelingsleer is, merk Hersh (1997:27) tereg op:

> What does this assumption, that all mathematics is fundamentally set theory, do to Euclid, Archimedes, Newton, Leibniz, and Euler? No one dares to say they were thinking in terms of sets, hundreds of years before the set-theoretic reduction was invented.

As die wiskunde aksiomatiese versamelingsleer *is*, word die geskiedenis van die wiskunde eenvoudig opgeskort tot die laaste 126 jaar – altans indien Meschkowsi se siening korrek is dat die versamelingsleer eintlik gebore is in en deur Cantor se bewys van die nie-aftelbaarheid van die reële getalle in 1874 (Meschkowski 1972b:26ff). Die onhoudbare uitweg uit hierdie impasse is om die absurditeit daarvan te versterk – soos Hersh (1997:27) vervolgens verduidelik: "[T]heir understanding of what they did must be ignored! We know better than they how to explicate their work! ... That claim obscures history, and obscures the present, which is rooted in history."

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

6. Konstitueer wiskundige teorieë die wiskunde?

Die onderliggende probleem handel oor die status en aard van die versamelingsleer – die produk van wiskundige teorievorming. Wanneer enige wiskundige teorie ontwikkel word, kan daardie ontwikkeling histories gedateer word, soos in die geval van die ontwikkeling van Cantor se versamelingsleer. Die totstandbring van die versamelingsleer is met ander woorde self ’n historiese gebeurtenis – iets wat êrens op ’n spesifieke tyd en plek plaasgevind het. Eers nadat die versamelingsleer beslag gekry het en verder deur latere wiskundiges uitgebou is, soos deur Zermelo vermeld, kan ons ook van die geskiedenis van die versamelingsleer praat, maar dit kan nooit saamval met die geskiedenis van die wiskunde nie. Hoogstens kan dit ’n deel uitmaak van die geskiedenis van die wiskunde.

Hierdie situasie kan suggereer dat die wiskunde gerekonstrueer kan word deur te let op watter wiskundige teorieë agtereenvolgens dominant in die wiskunde was. Die probleem bly dan egter dat geen enkele dominante teorie die volle bestaansgeskiedenis van die wiskunde omvat nie. Die vraag “Wat is wiskunde?” sal gevolglik in hierdie benadering steeds ons greep ontwyk. Sal ons daarby baat om die klem te verskuif, weg van die wiskundiges en die teorieë wat deur hulle gevorm is na die *aard van dít waaroor hulle hul teorieë vorm*? Hoewel hierdie opsie ons bevry van die relatiewe kortstondigheid en uitgediendheid van bepaalde wiskundige teorieë, roep dit nuwe probleme op. Veronderstel ons sou stel dat die wiskunde dwarsdeur die geskiedenis daarvan met getalle[6] gemoeid was, dan ontstaan die vraag oor wat die status van getal is.

7. Die vraag oor die status van getal

Histories gesien bestaan daar inderdaad ’n besondere waardering van wat gewoonlik aangedui word as die natuurlike getalle, dit wil sê die normale getallery 1, 2, 3, 4 en so meer. Die leidende Duitse wiskundige teen die einde van die 19de eeu, Leopold Kronecker, wat gewoonlik geplaas word as ’n vroeë intuïsionis, het die volgende bekende stelling geformuleer: “Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.” (“Die liewe Heer het die heelgetalle gemaak; alles anders is mensewerk.”) ’n Onlangse werk wat deur Stephen Hawking as redakteur uitgegee is, imiteer Kronecker se woorde: *God Created the Integers*, *The Mathematical Breakthroughs that Changed History* (Hawking 2005). In terme van die huidige wiskundige praktyk verwys Kronecker se uitspraak weliswaar eintlik na wat bekend staan as die natuurlike getalle: (0), 1, 2, 3, ... In die wiskunde het die getal 0 ’n belangrike rol verkry as optellingsidentiteit, onder meer van die heelgetalle.

Kronecker se opmerking open egter die weg na twee verdere, nou verwante vervolgprobleme:

> i. As *God* die natuurlike getalle geskep het, dan bestaan hulle wérklik. Maar wat dan van die ánder soorte getalle – soos die heelgetalle, breuke en reële getalle? Is hulle bloot fiksies of skeppings van die menslike gees?
>
> ii. Die tweede probleem handel oor die kreatuurlike (nie-“Goddelike”) bestaans*wyse* van die natuurlike getalle en die ander tipes getalle: Bestaan hierdie getalle onafhanklik van die wiskundige of word hulle juis deur wiskundige aktiwiteite in die lewe geroep?[7]

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

8. Twee opsies

i. Enersyds sou gesê kon word dat die getalle in die menslike denke bestaan as blote denkkonstruksies. Beteken dit dat daar geen veelheid in die werklikheid onafhanklik van die menslike gees bestaan nie? Is daar ’n verskil tussen *veelheid* en ’n *getelde veelheid*? Verder: Is daar enigiets “in die menslike denke” wat omvattend en duursaam genoeg is om die volle spektrum van alles wat tot die geskiedenis van die wiskunde behoort, te omvat? Dink hier aan die probleem wat ons vroeër in verband met die aard van die wiskunde aan die orde gestel het. Voorts, beteken dit dan dat aangesien die denke van geen enkele individuele wiskundige alles in die wiskunde omvat nie, ons sal moet terugval op die “kollektiewe verstand” van alle wiskundiges tesame om die bestaan van die wiskunde te “red”? Hierdie opsie sal egter beperk moet word tot alle *tans lewende* wiskundiges, wat dan beteken dat die afgestorwe wiskundiges se intellektuele nalatenskap konsekwent geobjektiveer is, dit wil sê dat dit in wiskundige geskrifte wat vir die nageslag behoue gebly het, vasgelê is. Maar selfs in die konteks van hierdie scenario bly die onderliggende duursaamheid van waaroor dit in die wiskunde gaan, problematies, te veel gebonde aan die “wiskundige subjek” met te min ruimte, of selfs geen ruimte nie, vir die ontiese[8] bestaan van die veld van ondersoek van die wiskunde.

ii. Andersyds sou ons kon aanneem dat daar onafhanklik van die menslike intellek ’n aanknopingspunt vir die beoefening van die wiskunde “in die werklikheid” gegee is. Maddy (1997:185) meen dat “common sense” ons vertel dat “there are two houses of Congress, that 2 + 2 = 4, that a triangle has three sides ...” Maar dan vra sy: “[B]ut does common sense hold that 2 exists?” Die eerste veronderstelling wat normaalweg hierdie vraag vergesel, is dat getal iets moet wees soos gewone sintuiglik waarneembare entiteite. Op dieselfde bladsy lig Maddy hierdie probleemvraag bykomend met vervolgvrae toe: “Does it exist in space and time? Does it exist objectively?”

9. Van “alles is getal” tot ’n verlies aan bekoorlikheid

In antieke Griekeland is hierdie vraag bevestigend beantwoord deur die Pythagoreërs. In getal het hulle die *bestaansbeginsel* van alles onderken. Getal bestáán nie slegs nie; dit is die *wese* van wat bestaan. Dit het gelei tot hul welbekende oortuiging en grondstelling: “Alles is getal.”[9] Nogtans sou die verhouding tussen ’n sy en diagonaal van ’n reëlmatige vyfhoek aanleiding gee tot die ontdekking van sogenaamde onvergelykbare groothede – ’n ontdekking wat die ordenende (vormgewende) rol van “getal” in die “kosmos” ondermyn het, bedreig deur die *apeiron*, die onbegrensd-oneindige. Hierdie ontdekking van irrasionale getalle was veronderstel om ’n geheim te bly, maar Hippasos, wat dit blykbaar openbaar gemaak het, is daarvan beskuldig “to have betrayed a mathematical secret” (Riedweg 2005:107).

Wat op hierdie stadium duidelik geword het, is dat alhoewel elke getalsverhouding *geometries* voorstelbaar is, nie elke verhouding tussen twee lyne *aritmeties* voorgestel kan word nie. Laugwitz merk op dat dit daaruit volg dat Euklides die getalleteorie as ’n deel van die geometrie behandel het. Hy skryf: “Die verhouding tussen getalle laat ’n geometriese daarstelling toe, maar nie elke lyn-verhouding kan aritmeties voorgestel word nie. Dit fundeer die voorrang van die meetkunde bo die rekenkunde, en die konsekwensie hiervan is in die boeke van Euklides te vinde: Die teorie van getalle vorm ’n deel van die meetkunde.”[10]

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

Die gevolg hiervan was dat die Griekse filosofie daardeur tot die benutting van ’n ander modus van verklaring gebring is: Getal is agterweë gelaat en ruimte is as die nuwe perspektief ingespan – die sogenaamde *geometrisering* van die Griekse wiskunde.

10. Onderweg na ’n nuwe aritmetisistiese magsgreep

Hoewel getal hiermee die aanvanklike bekoorlikheid daarvan verloor het, sou die pendulum later weer terugswaai. Die bedreiging wat in die onbegrensde (oneindige) opgesluit lê, het daartoe gelei dat getaloorwegings ’n ondergeskikte rol in die Middeleeuse wysgerige denke gespeel het, omdat die skool van Parmenides (met die klem daarvan op die *statiese syn*) se invloed die synshiërargie met God as hoogste syn (*ipsum esse*) tot gevolg sou hê (die “chain of being”).

Ná die aritmetisering wat Descartes met sy analitiese meetkunde teweeg gebring het, sou dit nie lank neem voordat die aritmetisisme wat oorspronklik tot die Pythagoriese oorwaardering van getal gelei het, weer die strydperk betree nie. Vanaf Cauchy se leerboek in die analise (in 1821 gepubliseer) tot die uiteindelike gedagtewêreld van Weierstrass, Cantor en Dedekind (aan die einde van die 19de eeu) sien ons hoedat die aritmetisisme opnuut sy kragte gemobiliseer het om die wiskunde te aritmetiseer. Die verskil tussen hierdie 19de-eeuse ontwikkeling en die oorspronklike Pythagoriese aritmetisisme is daarin geleë dat waar dit die *oneindige* was wat tot die geometrisering van die Griekse wiskunde aanleiding gegee het, dit in die 19de eeu wéér die *oneindige* was wat hierdie keer die omgekeerde ontwikkeling begelei het – tot ’n skynbaar volledige aritmetisering van die wiskunde.[11]

Die Griekse wiskunde het egter nog slegs dit wat as die potensieel oneindige bekend gestaan het, aanvaar, terwyl Weierstrass, Dedekind en Cantor die aktueel oneindige benut het. Hierdie terme is van Aristoteles afkomstig. Later sou die twee vorme van die oneindige ook aangedui word as die onvoltooid oneindige en die voltooid oneindige. Cantor self het sy siening van die aard van hierdie twee soorte oneindigheid in die “Mededelinge oor die leer van die transfiniete” soos volg omskryf: “Die potensieel oneindige word verkieslik daar aangedui waar ’n onbepaalde, *veranderlike eindige* grootte voorkom, wat óf oor alle grense toeneem [...], óf benede alle grense in kleinheid afneem”; “Onder die aktueel oneindige is daarenteen ’n kwantum te verstaan, wat enersyds *nie veranderlik* is nie, maar veeleer in alle dele vas en bepaald, ’n regte konstante, is en tegelyk andersyds *elke* soortgelyke *eindige grootte* in grootte oortref” (Cantor 1962:401 – oorspronklik in Cantor 1887–1888). In die omskrywing wat hy in 1886 in ’n brief uit die Brieweboek gee, word die aktueel oneindige bykomend gekwalifiseer met die term *festes* (vaste): Die aktueel oneindige het altyd betrekking op ’n konstante kwantum, wat in sigself vas is (“ein in sich festes Quantum”) (uit die Brieweboek opgeneem in Meschkowski 1967:249).

11. Die ontwikkeling van die versamelingsleer

Met die ontwikkeling van die versamelingsleer (op die basis van die benutting van die aktueel oneindige) is die probleemvraag rakende die status van getal slegs verder gekompliseer, want toe moes nie alleen oor getal gepraat word nie, maar ook oor versamelings van getalle, dit wil sê getalversamelings. Dit roep ’n nuwe vraag op, naamlik: Wat is ’n versameling? Die weldeurdagte omskrywing wat

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

Cantor in 1895 van ’n versameling gee, lui: “Onder ’n ‘versameling’ verstaan ek elke samevatting *M* van bepaalde, wel-onderskeie objekte *m* van ons aanskouing of ons denke (wat die ‘elemente’ van *M* genoem word) tot ’n geheel” (Cantor 1895–1897:481; Cantor 1962:282).[12] Wat onmiddellik in hierdie omskrywing opval, is die aanwesigheid van ’n term wat ons besef van menigvuldigheid (met ander woorde hoeveelheid, meer en minder, suksessie) weerspieël, naamlik “elemente”, en ’n term wat ons besef van gelyktydigheid reflekteer, naamlik ’n geheel (totaliteit). Cantor se omskrywing maak dus tegelyk van ons getalbesef en ons ruimtebesef gebruik.[13] Nadat die versamelingsleer geaksiomatiseer is, het dit egter geblyk dat selfs ’n versamelingsteoretiese fundering van die natuurlike getalle die oneindigheidaksioma veronderstel (vgl. Meschkowski (1967:192)) – wat die intuïsionistiese wiskundiges verder geïnspireer het om die aritmetiese orde van opeenvolging (onderliggend aan die beginsel van wiskundige induksie) voorop te stel as die nieformaliseerbare vertrekpunt vir die wiskunde.[14] Bykomend veronderstel elke aksiomatisering primitiewe (ongedefinieerde) terme, terwyl Gödel daarop wys dat selfs die aard van ’n versameling in ’n sirkelredenasie vasloop indien dit gedefinieer wil word.[15]

12. Kan abstrahering die natuurlike getalle fundeer?

Die getal 2 is een van die natuurlike getalle 1, 2, 3, ... en tradisioneel is gedink dat ons hierdie getalle, byvoorbeeld wanneer hulle in ’n “tel-konteks” gebruik is, in die greep sou kon kry deur abstrahering van die menigvuldigheid van (getelde) dinge. Die term *abstrahering* is egter dubbelsinnig. Dit kan daarop dui dat van hierdie besonderhede afgesien word en wel deur toenemend te let op hoër vlakke van algemeenheid. Frege vermeld die maan, wat vanuit ’n meer algemene perspektief as “metgesel van die aarde”, “metgesel van ’n planeet”, “hemelliggaam”, “liggaam” en uiteindelik bloot “voorwerp” (ding) aangedui sou kon word – maar nêrens in hierdie ry hoërvlak-abstraherings vind ons die getal 1 nie.

Sou dit help indien ons van “eenhede” sou praat? Volgens Frege skiet ook hierdie alternatief te kort. Twee ewe uitsiglose opsies bestaan volgens hom. Ons kan enersyds let op die moontlikheid om getal te genereer deur die byeenbring van *verskillende* dinge. Dan verkry ons egter ’n akkumulasie van dinge waarin presies dié eienskappe waardeur hulle verskillend is, aangetref word – en dit is nie getal nie. Andersyds kan ons getal probeer konstrueer deur die vereniging van dit wat soortgelyk (“gleich”) is.[16] Dit verteenwoordig ’n ou opvatting wat onder meer by Hobbes, Hume en andere te vind is, naamlik dat getal in die wiskunde (soort-) gelyke eenhede veronderstel waaruit dit saamgestel is. Bring dit ons volgens Frege werklik by getal uit? Die eienskappe waardeur dinge hulle onderskei, is vir hul *aantal* irrelevant en iets vreemds. Wanneer daarenteen afgesien word (geabstraheer word) van hierdie eienskappe waarin dinge van mekaar verskil, is dit nie (hul) getal wat oorbly nie, maar slegs dié algemene enkele begrip waaronder al hierdie dinge nou val. Deur af te sien van die kleur van swart en wit katte bly slegs die algemene begrip “kat” oor (Frege 1884:45). Selfs die begrip van meerdere twees (instansies van 2) hou slegs die enkele algemene begrip “2” oor. ’n Bloot logiese verbinding (sintese) kan nooit getal(le) oplewer nie – iets wat Immanuel Kant reeds ingesien het (Kant 1956:15).

Dit verklaar waarom Frege die aard van ’n versameling met die *domein van ’n begrip* vervang het; hy praat van Begriffsumfang (begripsomvang).[17] Met hierdie logiese begripsklem het Frege ’n voor die hand liggende alternatief gemis, ’n alternatief waarvan hy egter nie bewus was nie, omdat hy nie ’n teoretiese verwysingsraamwerk gehad het wat hom in staat gestel het om naas die konkrete

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

dinge in die werklikheid, wat telkens onder hoër algemene begrippe tuisgebring kan word, ook ontiese aspekte (bestaanswyses, modi) te onderskei nie.[18]

Wat Frege wel raakgesien het, is dat abstraksie wat op konkrete dinge (entiteite) gerig is, nooit aspek-eienskappe aan ons kan lewer nie, want dit loop altyd bloot op meer algemene ding-begrippe uit. Insgelyks kan die logiese optelling van "ene" of "twees" slegs eindig by die herhaalde identifisering van 'n volgende instansie van dieselfde tipe. Die identifisering van "een", van nog "een" of van 'n "twee" en nog 'n "twee" eindig steeds bloot met die algemene ("abstrakte") begrippe "een-heid" of "twee-heid". Ons haal die bogemelde gedagte van Frege nou eers letterlik aan en gee dan die Afrikaanse vertaling daarvan. "Wenn wir die Zahl andererseits durch Zusammenfassung von Gleichem bilden wollen, so fließt dies immerfort in eins zusammen, und wir kommen nie zu einer Mehrheit" (Frege 1884:50). In Afrikaans: "Wanneer ons die getal andersyds deur die samevatting van wat soortgelyk is wil konstrueer, dan vloei dit altyd in een tesame, en kom ons nooit tot 'n menigvuldigheid nie."[19]

13. Die aard van die getalsaspek

13.1 'n Modus van die werklikheid

Solank daar nie in alle erns ondersoek ingestel word na die aard van die verskillende aspekte of bestaanswyses van die werklikheid nie, sal die status van getal-uitsprake problematies bly. Die aspekte belig immers die "hoe" van die dinge wat ons ervaar en nie die konkrete "wat" daarvan nie. Vrae soos: hoe sterk?; hoe vinnig?; hoe groot?; en hoeveel? appelleer onderskeidelik op die fisiese, kinematiese, ruimtelike en kwantitatiewe aspekte van die werklikheid. As bestaanswyses kan hierdie aspekte ook as funksies of modaliteite aangedui word. Die funksie van konkrete dinge in hierdie (en ander) aspekte is tipies in die sin dat die konkrete alsydigheid daarvan 'n gespesifiseerde vorm in die verskillende aspekte aanneem.[20]

13.2 Modale universaliteit

Die universele reikwydte van modale aspekte, hul modale universaliteit, gaan die tipiese aard van enige entiteit wat bloot in die verskillende aspekte funksioneer, te bowe. Enersyds beteken dit dat die verskillende aspekte van die werklikheid alle konkrete dinge wat daarin funksioneer, medebepaal – waarmee meteens die skynbare misterie, naamlik dat aspekwette (soos getalwette, ruimtewette en bewegingswette) van krag is (geldig is) vir konkrete dinge en prosesse,[21] verklaar word – en andersyds beteken dit dat geen entiteite ooit volledig opgaan in énige aspek nie.

13.3 Modale abstrahering

Hoewel verskillende dinge deur middel van entiteitsgerigte abstrahering "soortgelyk" gemaak kan word rakende hul niekwantitatiewe eienskappe, word hulle steeds van mekaar onderskei – en daarom bly hulle 'n menigvuldigheid. Dit toon aan dat, kragtens die modale universaliteit van die getalsaspek, geen enkele entiteit daaraan kan ontkom om ook in hierdie aspek (van onderskeie hoeveelheid) 'n funksie te hê nie. Frege het sy aandag gefokus op die konkrete entiteite en sodoende nagelaat om rekenskap te gee van 'n egte numeriese menigvuldigheid (diskrete kwantiteit). Soos 'n telraam dinge demonstreer, beland ons by die getalsvraag in 'n situasie waar die nie-aritmetiese eienskappe

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

uiteindelik agterweë gelaat moet word. Dan is die vraag immers nie meer: watter kleur?; waarheen moet die blokkies geskuif (beweeg) word?; of wat is die (ruimtelike) vorm daarvan nie?, maar bloot: *hoeveel* blokkies is daar? – die uiteindelike *getalsvraag*.

13.4 Die aritmetiese orde van opeenvolging

Binne die oorspronklike sin van getal is die eerste (en enigste!) tree in die benutting van een of ander vorm van suksessie gegee.[22] Selfs om die kardinaliteit van ’n gegewe aantal elemente vas te stel, moet een of ander vorm van opeenvolging benut word. Deurslaggewend vir ons getalbesef is derhalwe die aritmetiese orde van opeenvolging. Daarsonder verval die uniekheid van elke natuurlike en heelgetal. Omdat elke orde altyd korreleer met gegewens wat aan die betrokke orde onderworpe (subjek) is, sal daar altyd ’n onverbreeklike samehang tussen die aritmetiese orde van opeenvolging en bypassende aritmetiese subjekte bestaan. Die natuurlike getalle verteenwoordig die mees basiese getalsubjekte.

13.5 Godgemaak of mensgemaak?

Ons moet egter ’n onderskeid tref tussen ’n gegewe menigvuldigheid – in watter mate dit *telbaar* (of onderskeibaar) is – en die daadwerklike *tel* daarvan deur die mens. Dit is immers eers deurdat allerlei dinge in ons alledaagse ervaring getel word dat bypassende telwoorde (“numerals” in Engels) benodig word. Telwoorde, of getalsimbole, soos dit ook heet, dui derhalwe op die respons van die mens as teller. Gevolglik besit hierdie telwoorde – byvoorbeeld “een”, “twee”, “drie” en so meer – nie ’n bestaan wat onafhanklik van die mens is nie; hulle is immers deur die mens geskep. Daarom is Kronecker se bogemelde (aangepaste) uitspraak, naamlik dat God die natuurlike getalle gemaak het en die mens al die ander getalle, nie korrek nie: Alle getalname (met ander woorde die “numerals” vir natuurlike getalle, heelgetalle, breuke, reële getalle, imaginêre getalle en transfiniete getalle) is deur die mens daargestel.

Hiermee is natuurlik nog geensins beweer dat “getal” as sodanig (volledig) deur die mens “geskep” is nie! Die term *getal* is immers dubbelsinnig – dit kan enersyds verwys na die “nog nie getelde” (met ander woorde *gegewe*) menigvuldigheid wat tot die “objektiewe” werklikheid behoort, soos dit meestal heet, of dit kan andersyds verwys na die “subjektief gekonstrueerde” werklikheid van ’n “getelde” menigvuldigheid (die getalsimbole wat uiteindelik in wiskundige geskrifte verskyn).

13.6 Bestaan die getal 2?

Indien ons tans na Maddy se vraag “Does common sense hold that 2 exists?” terugkeer, sou gesê kon word dat ons onnadenkend in ons alledaagse ervaring (“common sense”) vashou aan die realiteit van getalle, insluitende die getal 2. In die lig van ons besinning tot dusver kan ons bykomend stel dat die getal 2 ’n aritmetiese subjek is wat met die “numeral” 2 aangedui word. Uit hoofde van die aritmetiese orde van opeenvolging beklee die getal 2 ’n unieke plek in die ry (natuurlike) getalle – en in hierdie sin is daar slegs één 2! Daarom is dit begryplik dat Frege oortuig is dat daar nie verskillende getalle *twee* bestaan nie.[23] Bykomend wys Frege tereg daarop dat wanneer iets getel word, dit plaasvind op die basis van ’n “een-tot-een”-korrelasie tussen telwoorde en die versameling getelde dinge (“objekte”): “... that counting itself rests on a one-one correlation,

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

namely between the number-words from 1 to n and the objects of the set" (vgl. Dummett (1995:144)).

13.7 "Bestaan" val nie saam met "sintuiglik waarneembaar" nie

Wanneer ons die implisiete gelykstelling van "bestaan" met "sintuiglik waarneembaar" agterweë laat, open dit meteens die weg om die "objektiewe" bestaan van die verskillende werklikheidsaspekte te erken. Dit is weliswaar verkieslik om van die *ontiese bestaan* van die aspekte te praat, omdat die term *objektief* onnodige en lastige *ontologiese* (!) konnotasies besit.

Wang vermeld dat Gödel daarvan oortuig was dat "mathematical objects" 'n aspek van die "objektiewe werklikheid" weerspieël wat op 'n ander soort relasie tussen ons en die werklikheid gefundeer is. Volgens Wang was Gödel veral beïndruk met 'n opmerking wat hy aan Bernays toegeskryf het: "That the flower has *five* petals is as much a part of objective reality as that its color is *red*" (Wang 1988:202). Met betrekking tot "mathematical objects" stel Gödel: "Rather they, too, may represent an aspect of objective reality, but, as opposed to the sensations, their presence in us may be due to another kind of relationship between ourselves and reality" (aangehaal deur Wang (1988:304; vgl. p. 205)). Hieraan voeg Wang sy eie ondersteuning toe, want hy is geneig om met Gödel saam te stem, hoewel hy onseker voel oor hoe hy dit presies moet verwoord: "I am inclined to agree with Gödel, but do not know how to elaborate his assertions. I used to have trouble by the association of objective existence with having a fixed 'residence' in spacetime. But I now feel that 'an aspect of objective reality' can exist (and be 'perceived by semiperceptions') without it occupying a location in spacetime in the way physical objects do" (Wang 1988:304).

Hoewel hierdie wiskundiges deeglik besef het dat daar nie aan die *realiteit* van die getalsaspek ontkom kan word nie, het hulle tegelyk ook besef dat dit nie aan sintuiglik waarneembare dinge gelykgestel kan word nie. Die gebrek aan 'n teorie van modale aspekte het 'n duidelike verantwoording van hierdie insig egter bemoeilik.

13.8 Kan getal gedefinieer word?

Wat Gödel hier bo opgemerk het oor die sirkulêre aard van pogings om 'n versameling te definieer, is ten opsigte van getal self ewe geldig. Nie net in die logika nie, maar ook in alle wetenskaplike dissiplines vind ons 'n erkenning van primitiewe terme wat ondefinieerbaar is. Die intuïsionistiese wiskunde en 'n wiskundige soos Skolem het van meet af aan die ondefinieerbaarheid van "getal" met die eenvoudige suksessie van die natuurlike getalle verbind. In 1922 skryf Skolem onder meer (sien ook Strauss (2005a)):

> Die versamelingsteoretici meen gewoonlik dat die begrip heelgetal gedefinieer moet word en dat volledige induksie bewys moet word. Dit is egter duidelik dat 'n mens nie tot in die oneindige kan definieer of begrond nie; vroeër of later beland 'n mens by dit wat nie verder gedefinieer kan word nie of dit wat onbewysbaar is. Dan gaan dit daaroor dat die eerste begin-aannames onmiddellik duidelik moet wees, dat dit natuurlik en ontwyfelbaar moet wees. Hierdie kondisie word deur die begrip heelgetal en induktiewe gevolgtrekkings vervul, maar is beslis nie vervul deur versamelingsteoretiese aksiomas soos dié van Zermelo of soortgelykes nie; indien 'n mens die terugvoering van eersgenoemde begrippe op

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

> laasgenoemde wil erken, dan moet die versamelingsteoretiese begrippe eenvoudiger wees en dan moet die denke daarmee meer ontwyfelbaar wees as volledige induksie, maar dit gaan totaal teen die grein van die werklike feitlike toedrag van sake in. (Skolem 1979:70)[24]

(Vgl. ook Strauss (2005b).)

Die uniekheid van elke modale aspek van die werklikheid word gewaarborg deur die ondefinieerbare kernsin (of: sin-kern) daarvan wat tegelyk ook die onherleibaarheid van elke aspek onderlê.[25] Die ondefinieerbaarheid van die aspekte, wat derhalwe die aard van begripsvorming te bowe gaan, kan intuïtief ingesien word en hierdie (begripstransenderende) insig benodig ’n toepaslike (nie nader definieerbare nie) term waarmee dit aangedui word.[26] Gegewe die dominante tradisie in die Westerse denke wat kennis met begripskennis vereenselwig, impliseer die ondefinieerbaarheid van die kernsin van die aspekte dat daar ook ruimte is vir begripstransenderende kennis, dit wil sê idee-kennis (Strauss 2003b).

14. Uniekheid en samehang

Die keersy aan die uniekheid van die aspekte is egter gegee in die *onverbreeklike samehang* waarin die aspekte gevoeg is. Binne elke aspek word daar gevolglik struktuurelemente aangetref waarin die wederkerige samehang na vore tree. Afhanklik van die “ordeplek” van ’n aspek in die ry van aspekte[27] word hierdie samehangsmomente as onderskeidelik terugwysings (retrosipasies) en vooruitwysings (antisipasies) aangedui. Binne die getalsaspek is die relasie tussen die *ene* en die *vele* oorspronklik, maar in elke ander aspek kom hierdie getalsin nie-oorspronklik, dit wil sê analogies, voor, byvoorbeeld wanneer ons sou praat van ’n ruimtelike eenheid en menigvuldigheid, of van die logiese eenheid van ’n begrip waarin ’n menigvuldigheid van (logies geobjektiveerde) kenmerke opgeneem is.

Hierdie terugwysende analogieë vanuit latere aspekte na die getalsaspek kan beide aan die wetsy en die daarmee korrelerende feitelike [soos in diagram hier onder] sy van ’n aspek onderskei word. ’n Eindige reguit lyn word deur ’n beginpunt en ’n eindpunt begrens. Die lengte van hierdie lyn (eendimensionale grootte) word deur ’n getal aangegee, waaruit blyk dat lengte ’n analogie van die oorspronklike getalsin is.[28] Deur te praat van die lyn as ééndimensionale ruimtelike subjek, word implisiet ’n bypassende (korrelerende) orde aan die wetsy van die ruimte-aspek veronderstel. Ons sien dit in die ruimtelike orde van gelyktydigheid (opeens).[29] Die element *tyd* wat in die woord *gelyktydigheid* opgeneem is, suggereer dat ons ewe goed van die ruimtelike tydsorde van gelyktydigheid kan praat, wat op sy beurt suggereer dat ons selfs in die getalsaspek na die aritmetiese tydsorde van opeenvolging kan verwys.[30] Binne die kader van die onderskeiding tussen wetsy en feitelike sy, en onderskraag deur die (begripstransenderende) idee van ’n kwalifiserende en ondefinieerbare sin-kern, vind ons ’n verantwoording van die klassieke grondprobleem van alle wetenskaplike (wysgerige en vakwetenskaplike) denke: die aard van uniekheid en samehang. Eersgenoemde (uniekheid) word ook aangedui as die soewereiniteit-in-eie-kring en laasgenoemde as die universaliteit-in-eie-kring van elke aspek (sien Strauss (2009a)).

Hierdie problematiek (in Engels ook aan te dui as die “coherence of irreducibles”) is nie die alleenbesit van enige wysgerige of vakwetenskaplike denkrigting nie. Let bloot op ’n onlangse werk waarin die kernelemente van die onderskeidinge

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

wat pas verduidelik is, onmiskenbaar as kern-idees van Gödel aan die orde gestel word. Yourgrau (2005:169) verduidelik dat Gödel "insisted that to know the primitive concepts, one must not only understand their relationships to the other primitives but must grasp them on their own, by a kind of 'intuition'". Op die volgende bladsy voeg hy daaraan toe dat "the fundamental concepts are primitive and their meaning is not exhausted by their relationships to other concepts". Dit is sekerlik so na as wat 'n denker kan kom aan die idees van soewereiniteit-in-eie-kring en universaliteit-in-eie-kring wat ons pas saaklik uiteengesit het! Om die idee van die struktuur van 'n aspek meer aanskoulik te maak, word die onderstaande skets ingevoeg.

15. Getal fundeer ruimte

Die Griekse wiskundiges was van mening dat kontinuïteit eenvoudiger as diskreetheid was. Dit hang daarmee saam dat dit *opeens* begryp kan word. Fraenkel, Bar-Hillel, Level en Van Dalen (1973) wys enersyds op die aritmetisering wat onderliggend aan die paradokse van Zeno is, maar vermeld dan andersyds dat die omgekeerde rigting ook nagestreef kan word, "for intuition seems to comprehend the continuum at once". Hulle vervolg: "Mainly for this reason Greek mathematics and philosophy were inclined to consider continuity to be the simpler concept" (1973:213). Longo (2001:6) vermeld 'n soortgelyke kontemporêre siening wat by René Thom en andere aangetref word: "For him, as for many mathematicians of the continuum, 'the continuum precedes ontologically the discrete', for the latter is merely an 'accident coming out of the continuum background', 'a broken line'." Elders merk hy ook op: "By contrast Leibniz and Thom consider the continuum as the original giving, central to all

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

mathematical construction, while the discrete is only represented as a singularity, as a catastrophe" (Longo 2001:19). Terselfdertyd besef Longo weliswaar dat die versamelingsteoretiese praktyk van Cantor, Dedekind en Frege ontologiese prioriteit verleen aan diskrete nosies "and derive the mathematical continuum from the integers" (Longo 2001:19; vgl. p. 20).

Sodra die aard van ruimtelike kontinuïteit egter nader ondersoek word, blyk dit spoedig dat dit die suksessie van getal *veronderstel* (vgl. Strauss (2002a)). Die term *kontinuïteit* kan immers met wisselterme soos *gekonnekteerdheid* en *samehang* vervang word. Wanneer iets kontinu is, is daar geen hiate (gapings) nie[31] – alle dele is gekonnekteerd en hang saam.[32] Wanneer alle (samehangende, gekonnekteerde) *dele* egter teenwoordig is, vind ons inderdaad die *geheel* van hierdie dele. Daarom behoort die totaliteitskarakter (geheel-aard) van kontinuïteit tot die ruimte. Hieruit volg dat *kontinuïteit* bloot 'n wisselterm vir die geheel-dele-relasie is; alternatiewelik: dat die geheel-dele-relasie oorspronklik in die ruimte-aspek is, net soos wat 'n onderskeie hoeveelheid oorspronklik in die getalsaspek is.[33] Longo (2001:23) vermeld iets van hierdie insig wanneer hy na Leibniz en Kant verwys: "Also for Leibniz and Kant the continuum cannot be decomposed into its elements, it is not formed from simpler unities: it presents itself simultaneously as a totality and its parts."

Die geheel-dele-relasie beliggaam 'n *ruimtelike* eenheid-in-die-menigvuldigheid, dit wil sê dit beliggaam 'n terugwysende analogie (retrosipasie) vanuit die ruimte-aspek na die (funderende) getalsaspek. Wanneer ons die aritmetiese tydsorde van opeenvolging aan die wetsy van die getalsaspek verreken, blyk dit spoedig dat die (suksessief) oneindige analogies in die ruimte-aspek terugkeer in die vorm van die suksessief oneindige verdeelbaarheid van ruimtelike kontinuïteit (van 'n ruimtelike geheel).

Omdat die intuïsionistiese wiskunde die aktueel oneindige (wat verkieslik as die *opeens oneindige* aangedui behoort te word), waarop Cantor sy versamelingsleer gebou het, verwerp, word teruggeval op die ruimtelike geheel-dele-relasie, want skynbaar is die enigste soort oneindigheid wat daarin na vore kom, die potensieel oneindige (die suksessief oneindige). Weyl (1966:74) skryf: "Nie in die relasie van element tot versameling nie, maar in dié van die deel tot die geheel sien Brouwer, in ooreenstemming met die intuïsie, die wese van die kontinuum." Reeds in 1921 meld hy dat dit "tot die wese van die kontinuum behoort dat elk van sy dele sig onbegrensd verder laat verdeel" (Weyl 1921:77). Dit handel met ander woorde oor die suksessief oneindige verdeelbaarheid van 'n ruimtelike kontinuum – en hierin sien ons duidelik dat ruimtelike kontinuïteit terugwys na die aritmetiese tydsorde van opeenvolging aan die wetsy van die getalsaspek. Hierdie orde van opeenvolging fundeer nie alleen die beginsel van (wiskundige) induksie nie, want dit onderlê ook die vier bewerkings wat ons aan die wetsy van die getalsaspek kan onderskei, naamlik optelling, vermenigvuldiging, aftrekking en deling.

Wat merkwaardig is, is dat iemand wat volledig meegewerk het aan die aksiomatisering van die klassieke wiskunde, naamlik Paul Bernays, skerp afwysend en krities staan teenoor die aritmetiseringsaansprake van die aksiomatiese versamelingsleer. Bernays (1976:74) wys daarop dat dit die totaliteitskarakter van die "geometriese voorstelling van die kontinuum" is wat "in die weg van 'n volledige aritmetisering van die kontinuum staan" (sien ook Strauss (1988)). Hierdie insig berus op 'n afwysing van die gebruiklike praktyk om ons aritmetiese en geometriese intuïsie met ruimte en tyd te verbind. Bernays stel hierteenoor dat die onderskeiding tussen aritmetiese en geometriese intuïsie in verband gebring moet word met die verskil tussen diskreetheid en kontinuïteit:

"Dit is aan te beveel om die onderskeiding tussen 'aritmetiese' en 'geometriese' intuïsie nie ooreenkomstig die momente van die tydelike en ruimtelike deur te voer nie, maar met 'n perspektief op die verskil tussen die diskrete en die kontinue."[34]

Dít wat so pas verduidelik is, kan weer eens met 'n skets toegelig word:

Die aard van uniekheid en samehang dui egter daarop dat geen aspek in sigself afgesluit kan word nie, dat die *sin* van elke aspek trouens in die *samehang* daarvan met ander aspekte tot uitdrukking kom. Ten opsigte van die aard van ruimtelike kontinuïteit het ons byvoorbeeld gewys op die (suksessief) oneindige verdeelbaarheid daarvan – waarin die terugwysing (retrosipasie) na die aritmetiese tydsorde van opeenvolging tot openbaring kom.

16. Wat getal by ruimte kan "leen"

Omdat die geheel-dele-relasie oorspronklik in die ruimte-aspek is, beteken dit – gesien vanuit die perspektief van die getalsaspek – dat ons getalmatig van 'n geheel, of totaliteit, kan praat slegs indien die terme *geheel* en *totaliteit* by die ruimte-aspek "geleen" word. Deur derhalwe van "heel"-getalle te praat, word die aard van ruimtelike kontinuïteit geïmiteer, of nageboots – met klem op die "geheel"-eienskap van die ruimtelike geheel-dele-relasie.

Die oomblik wanneer ons egter die keersy van die "geheel" in oënskou neem, naamlik die *dele*-element van *geheel-dele-relasie*, word die *heel*-getalle "opgebreek", *ver-deel*, en dan ontmoet ons hierdie "gebroke" getalle, naamlik die *breuke*. Slegs wanneer die geheel-dele-relasie by die ruimte-aspek "geleen" word, maak dit sin om van heelgetalle en breuke te praat. In terme van ons voorstelling van die struktuur van 'n aspek beteken dit dus dat die getalsaspek na die ruimte-aspek vooruitgryp of vooruitwys (dit antisipeer) wanneer van heelgetalle en breuke gepraat word. Die oneindige verdeelbaarheid van 'n ruimtelike kontinuum word gevolglik deur enige breuk-interval (enige twee

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

verskillende rasionale getalle) sodanig nageboots dat die aritmetiese verskil tussen enige twee rasionale getalle ook sonder einde in twee gedeel (gehalveer) kan word. Die getalwaarde van ’n rasionale interval is dus ook *suksessief oneindig verdeelbaar* (’n vooruitwysing na ’n terugwysing).

16.1 Suksessie en gelyktydigheid: oneindigheid in ’n nuwe lig

Wat gebeur egter wanneer ons die tydsordes aan die wetsy van die getalsaspek en ruimte-aspek met mekaar in verband bring? Cantor beroep hom op Augustinus, wat reeds onderskei het tussen die suksessie van oneindigheid (toeganklik vir die menslike verstand) en God, wat elke suksessie opeens oorsien (Cantor 1987–1888; 1962:402 e.v. en Augustinus se *Confessiones* XI,11,13 (Augustinus 1991); *De Trinitate* XII,14 (Augustinus 2002)). Plotinus (1969) het in sy *Enneade* III/7 *ewigheid* aan die *tydlose hede* verbind en sodoende bygedra tot die uiteindelike fundering van die idee van aktuele oneindigheid in die ruimtelike orde van gelyktydigheid. Teen die einde van die 18de eeu sit Maimon hierdie tradisie voort wanneer hy die onderskeiding tussen ’n beperkte menslike gees en ’n absolute verstand benut.

> ’n Oneindige getal kan aan ons nie anders verskyn (omdat ons waarneming aan die vorm van tyd gebonde is) as ’n oneindige suksessie in die tyd nie (wat derhalwe nie as iets voltooids bedink kan word nie). In die geval van ’n absolute verstand daarenteen, word die begrip van ’n oneindige getal, sonder enige tydsverloop, opeens bedink. Derhalwe, wat die verstand in die begrensde vorm daarvan as ’n blote idee beskou, is in terme van die absolute bestaan daarvan ’n egte voorwerp. (Maimon 2004:228)

Longo (2001:9) verwys nog steeds daarna dat die reële getalle bestaan en dat God almal ken. Uit hoofde van die oorspronklike ruimtelike sin van die geheel-dele-relasie, soos bepaal en begrens deur die ruimtelike tydsorde van gelyktydigheid, volg dit dat ’n ruimte-figuur slegs kan bestaan indien alle dele daarvan *opeens* teenwoordig is. ’n Driehoek bestaan nie uit ’n suksessie van sye – eers die een sy, dan die ander sy en dan die derde sy – nie. Slegs as al drie sye *tegelyk* (opeens) aanwesig is, bestaan ’n driehoek as driehoek.

16.2 Die opeens oneindige: oneindige totaliteite

Dieselfde geld by ’n gewone reguit lyn: Die punte op die lyn verskyn nie in suksessie nie[35] – almal is *opeens* teenwoordig. Sodra die aritmetiese tydsorde van opeenvolging in verband gebring word met die ruimtelike tydsorde van gelyktydigheid (tegnies gestel: ontsluit of verdiep word),[36] ontmoet ons die *verdiepte* sin van oneindigheid, soos vermeld – tradisioneel as die aktueel oneindige of die voltooid oneindige aangedui, maar wat, sistematies gesien, ten beste as die *opeens oneindige* beskryf kan word. Hiermee word ons teruggevoer na Cantor se omskrywing van die aktueel oneindige as iets wat “veeleer in alle dele vas en bepaald is, ’n regte konstante is, en tegelyk andersyds *elke* soortgelyke *eindige grootte* in grootte oortref” (Cantor 1962:401). Hier is geen sprake van suksessie of eindigheid nie. Soos *God* by Augustinus of ’n *absolute verstand* by Maimon, is al die *dele* van ’n opeens oneindige versameling *vas en bepaald*. Sedertdien het dit by wiskundiges gebruiklik geword om van iets soos ’n oneindige totaliteit te praat. Selfs die intuïsionistiese wiskundiges praat van ’n *oneindige domein*. Dummett gebruik byvoorbeeld dikwels die uitdrukking “infinite domain” as ’n alternatief vir ’n opeens oneindige totaliteit (Dummett 1978:22, 24,

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

57, 58, 59, 63 e.s.m.). Beide uitdrukkings – *oneindige domein* en *oneindige totaliteit* – beliggaam egter die vooruitwysende (antisiperende) samehang tussen getal en ruimte. Die gemelde kernagtige tipering wat my eie voorkeur beliggaam (soos vroeër vermeld), maar wat eintlik uit die geskiedenis van die filosofie kom, is om van die *opeens oneindige* te praat.[37]

16.3 Omkering van die ontsluitingsorde

Cantor self het die ontsluitingsorde omgekeer en die aktueel oneindige (opeens oneindige) as die grondslag van en basis vir die potensieel oneindige gepostuleer. Hy skryf: "So veronderstel elke potensieel oneindige, indien dit eksak wiskundig aanwendbaar wil wees, 'n aktueel oneindige" (aangehaal deur Meschkowski 1967:250). Indien hierdie ontsluitingsorde nie omgekeer word nie, kan ons saam met Lorenzen stel dat die aritmetika geen motief vir die invoering van die opeens oneindige bied nie.[38]

16.4 Die opeens oneindige as regulatiewe hipotese

Wanneer wiskundige denke die onontslote getalsin van die suksessief oneindige wil verdiep, is die enigste moontlikheid gegee in die *regulatiewe hipotese*, wat enige suksessief oneindige versameling getalle beskou as 'n oneindige totaliteit waarvan die elemente almal opeensvoorhande is.[39] Hoewel Lorenzen (in sy konstruktiewe wiskunde en logika) die opeens oneindige verwerp (hy meen dit is 'n "fiksie"),[40] verduidelik hy die bedoeling daarvan in besonderhede. Hy stel dat wanneer die oneindige aan "alle" verbind word, ons 'n fiksie gebruik, naamlik "the fiction, as if infinitely many numbers are given" (Lorenzen 1952:593). Gauss se protes (in 'n brief aan Schumacher op 12 Julie 1831) teen die "gebruik van 'n oneindige grootte as iets voltooids wat nooit in die wiskunde toelaatbaar is nie" (aangehaal deur Meschkowski 1972b:31), het talle wiskundiges ná hom opgesaal met die probleem dat hulle die opeens oneindige verwerp het op grond van die feit dat hulle die suksessief oneindige as maatstaf gebruik het.[41] Rekenaarbewerkings is selfs beperk tot 'n eindige snit van die suksessief oneindige (Strauss 2006b). Lorenzen verduidelik die toepassing van die opeens oneindige op die reële getalle soos volg: "'n Mens stel jou veel eerder die reële getalle voor as almal opeens werklik voorhande." Selfs elke reële getal word "self reeds so voorgestel asof die oneindig vele syfers daarvan almal opeens bestaan" (Lorenzen 1972:163).[42]

17. Versamelings: op die grens van getal en ruimte

In die oorspronklike omskrywing van Cantor het ons gesien dat hy klem gelê het op veral twee momente: (i) 'n menigvuldigheid van welonderskeie elemente ("wohlunterschiedenen Objekten ... 'Elemente'") en (ii) dat hierdie menigvuldigheid saamgevat is in die eenheid van 'n geheel of totaliteit (*Ganzheit*). Punt (i) verwys na eenheid en veelheid (getal) en punt (ii) na die geheel-dele-relasie (ruimte). Die Zermelo-Fraenkel aksiomatiese versamelingsleer verleen nie net erkenning hieraan nie, naamlik deur as primitiewe versamelingsteoretiese simbool die "lidmaatskaprelasie" ("membership relation" – $\in$) in te voer (Fraenkel e.a. 1973:22-3), want bykomend word ook die belangrike verskil tussen $\in$ en $\subseteq$ gehandhaaf.[43]

In die oneindigheidsaksioma van die Zermelo-Fraenkel-versamelingsleer is die ruimtelike geheel-dele-relasie nog nie geïmpliseer nie (Fraenkel e.a. 1973:46

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

e.v.) – dit geskied wel (subtiel) in die aksioma van die magsversameling: Vir enige (*hele*) versameling *a* bestaan daar ’n versameling waarvan die “lede” presies al die *deel*versamelings van *a* is (Fraenkel e.a. 1973:35). In die Zermelo-Fraenkel versamelingsteoretiese aksioma-sisteem is $\in$ die enigste spesifieke versamelingsteoretiese primitiewe simbool wat die “membership”-relasie aandui en dan spesifiseer hulle: “We shall read $x \in y$ as ‘*x* is a member of *y*’ and, synonymously, as ‘*x* belongs to *y*’, ‘*x* is contained in *y*’, ‘*y* contains *x* (as member)’.” In ’n voetnoot word verder verduidelik: “We avoid the phrase ‘*x* is an element of *y*’ since we shall use the term ‘element’ in a different meaning” (Fraenkel e.a. 1973:23). Eers wanneer hierdie twee aksiomas in samehang benut word, kan met oneindige totaliteite gewerk word, dit wil sê die opeens oneindige word dan eers “geaktiveer” en kom “in aksie”. En slegs wanneer die opeens oneindige benut word, kan met behulp van die beroemde diagonaalbewys van Cantor bewys word dat die reële getalle ooraftelbaar (nie-aftelbaar) is. Die konstruktivistiese wyse waarop die intuïsionisme hierdie bewys interpreteer, lewer egter slegs *aftelbare* versamelings (“species”) op.[43]

In die aksiomaties formalistiese kringe van die 20ste-eeuse wiskunde het die opeens oneindige versameling reële getalle die status van “die kontinuum” verkry. Getrou aan Aristoteles se twee vereistes vir ’n kontinuum, naamlik oneindige verdeelbaarheid en die gegewe dat elke verdelingspunt twee keer benut word – as eindpunt en as beginpunt (Physica 231b8; 231b15 e.v. – vertaling in McKeon 2001:316–7; ook opgeneem in McKeon 2001:316–7) – definieer Cantor ’n puntkontinuum (Punktkontinuum) as ’n “perfek samehangende versameling”.[44]

Bernays verwerp wat hy as die “aritmetiserende monisme in die wiskunde” bestempel – dit is volgens hom ’n “willekeurige tese” wat vergeet dat die “idee van die kontinuum oorspronklik ’n ruimte-idee is” (Bernays 1976:188). Hy beweer gevolglik dat die “idee van die kontinuum ’n geometriese idee is wat deur die analise in ’n aritmetiese taal uitgedruk word” (Bernays 1976:74). Indien hy egter oor ’n teorie van *modale aspekte* beskik het, sou hy ewe goed kon sê: “Die reële getalle imiteer (antisipeer) die oorspronklike ruimtelike aard van kontinuïteit.” Ons het opgemerk dat Gödel vir alle praktiese doeleindes reeds ingesien het dat primitiewe terme op gegewens wat ondefinieerbaar is, appelleer, dat hierdie oorspronklike terme op ’n onmiddellike intuïtiewe insig berus, en dat die sin van hierdie terme deels in hul wederkerige samehang tot openbaring kom. Hierdie sonderlinge benadering tot die idees van soewereiniteit-in-eie-kring en universaliteit-in-eie-kring word bykomend onderstreep deur sy aanspraak dat die aard van ’n versameling geensins op ’n niesirkulêre wyse omskryf kan word nie.

Aangesien die versamelingsbegrip, soos ook reeds hier bo vermeld is, gelyktydig van ons getalsintuïsie (menigvuldigheid) en ons ruimte-intuïsie (geheelheid) gebruik maak, hoef dit ons geensins te verbaas dat Gödel iets “ruimteliks” in ’n versameling terugvind nie. Wang (1988:202) merk op dat Gödel van versamelings as “quasi-spatial” praat en stel dan: “I am not sure whether he would say the same thing of numbers.”

Deur die antisiperende samehang tussen getal en ruimte te verreken, kan die versamelingsleer beskryf word as ’n *ruimtelik ontslote getalteorie*.[45]

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

18. Samevattende perspektief

Veral in sy 1986-werk stel Laugwitz die unieke aard van die getalsaspek op so ’n wyse voor dat die sin-kern van hierdie aspek opnuut alle vooruitwysende analogieë binne die getalsaspek kwalifiseer. Dit beteken allereers dat geen enkele tipe, of soort, getalle kan ontkom aan die uiteindelike diskreetheid (distinctness – onderskeie-wees) wat alle getalle onherroeplik stempel nie. Elke natuurlike getal, heelgetal, breuk en reële getal is uniek en is apart (onderskeidelik) identifiseerbaar. In hierdie opsig is elke getal verskillend van elke ander getal, wat eweseer uniek is. Dit impliseer dat alle getalsoorte onherroeplik ’n menigvuldigheid bly. Laugwitz wys daarop dat hoewel daar ’n veelheid punte, lyne en vlakke in die ruimte is (en uit hierdie veelheid of menigvuldigheid blyk die samehang met getal waarin ruimteverhoudinge gefundeer is), nóg punte, nóg lyne, nóg vlakke, soos getalle, kenmerkende eienskappe besit.[46]

As dit so is dat alle tipes getalle ’n menigvuldigheid daarstel en daarin onherroeplik bly deel hê aan die onderskeie uniekheid (dit wil sê die diskrete aard) van getal, hoe moet ons dan rekenskap gee van die verskillende gebruiklike wiskundige tiperinge waarin gestel word dat die (versamelings) natuurlike (en heel-) getalle diskreet is, die rasionale getalle dig is en die reële getalle kontinu is? Die antwoord (wat ons hier onder ook in ’n skets saamvat) lui soos volg:

> Natuurlike en heelgetalle reflekteer die oorspronklike sin van getal, soos wat dit allereers in die *tel*getalle na vore kom. Die aard van die ander tipes getalle kan egter nie bloot vanuit die onderskeie uniekheid van hul “verteenwoordigers” (dit wil sê suiwer getalmatig) verklaar word nie. Veeleer weerspieël (imiteer) elkeen van hierdie getalsoorte iets ruimte-matigs, naamlik een of ander struktuurelement van die oorspronklike aard van die ruimte-aspek.

My analise het getoon dat daar oorspronklike elemente in ons ruimte-besef teenwoordig is waarop die verskillende getalversamelings vooruitgryp. Die informele (of niegeaksiomatiseerde) algemene praktyk in die onderrig van die wiskunde om op hierdie wyse oor getalle en getalversamelings te praat, weerspieël derhalwe ’n intuïtiewe insig in die uniekheid en samehang van die getalsaspek en die ruimte-aspek, ten spyte van die feit dat die wiskunde tradisioneel nie oor ’n geartikuleerde teorie van modale aspekte beskik het nie. Insake die ruimte-aspek het ons op die volgende struktuurmomente gewys waarop getal antisipeer (vooruitgryp):

i. Eerstens die geheelaard (of totaliteitskarakter, soos Bernays dit noem) van enige ruimtefiguur wat kontinu uitgebrei is – vergelyk die benaming *heel*getalle (wiskundig word die versameling heelgetalle – eindig of aftelbaar oneindig – as “diskreet” aangedui).

ii. Tweedens is die keersy van die totaliteitseienskap in die eindelose (suksessief oneindige) verdeelbaarheid van ’n ruimtelike kontinuum gegee – vergelyk die benaming *breuke* (met die kenmerkende “digtheid” van die versameling rasionale getalle).

iii. Derdens verwys die reële getalle na die oorspronklike sin van ruimtelike kontinuïteit, wat die geykte wiskundige praktyk verklaar om daarna as die “kontinuum” te verwys. Gegewe die onderskeie uniekheid van elke reële getal is hierdie spreekwyse misleidend, want, soos Laugwitz opmerk, selfs in Cantor se omskrywing van ’n versameling “heers diskreetheid”. Hy stel trouens dat die

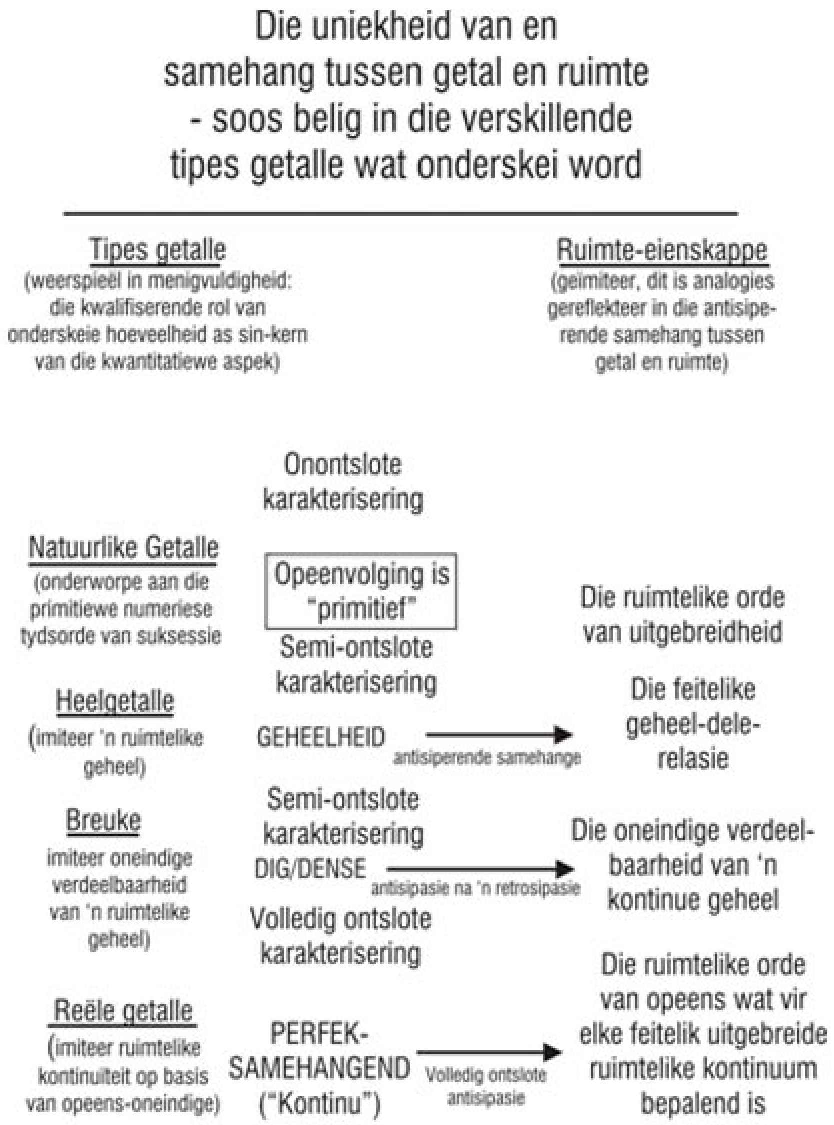
ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

versamelingsbegrip van meet af aan so bedink is dat dít wat kontinu is, die greep van die versamelingsleer ontsnap, want volgens Cantor bestaan ’n versameling uit “welonderskeie dinge” – wat beteken dat die *diskrete heers* (vgl. sy woorde wat hier onder volledig aangehaal word). Wat wiskundiges veronderstel is om te bedoel wanneer hulle oor die reële getalle praat, is dus eintlik dat die reële getalle die oorspronklike ruimtelike sin van kontinuïteit *imiteer* – of dat die reële getalle gesien moet word as behorende tot die ontslote of teoreties verdiepte struktuur van die getalsaspek, met ander woorde dat die reële getalle die volledig ontslote getalsantisipasie na ruimte verteenwoordig. (Die rasionale getalle gryp wel vooruit na die ruimtelike geheel-dele-relasie, maar hierdie vooruitwysing word onmiddellik “teruggekaats” na die suksessief oneindige aan die wetsy van die getalsaspek – wat impliseer dat ons ten opsigte van die rasionale getalle slegs van die *semi-ontslote sin* van die getalsaspek kan praat – ’n antisipasie na ’n retrosipasie.[47] Die intuïsionistiese teorie van die “kontinuum” vorder nie verder as hierdie semi-ontslote getalsin nie, omdat die intuïsionisme die opeens oneindige verwerp).

iv. Wanneer dít wat deur getal by die ruimte “geleen” word, nie as inherente aritmetiese eienskappe waardeer word nie, word diskreetheid as sin-kern van getal “bevry” om opnuut en onbelemmerd kwalifiserend op te tree ten opsigte van alle (antisiperende) getal*tipes* – hetsy aangedui as “diskreet”, “dig” of “kontinu”. Binne die domein van getal bly elke (natuurlike, heel-, rasionale en reële) getal daarom altyd uniek – “onderwerp” aan die “opperheerskappy” van die diskrete, soos Laugwitz tereg beklemtoon:

> Der Mengenbegriff ist von vornherein so angelegt worden, daß sich das Kontinuierliche seinem Zugriff entzieht, denn es soll sich nach Cantor bei einer Menge ja handelen um eine “Zusammenfassung” wohlunterschiedener Dinge ... – das Diskrete herrscht. (“Die versamelingsbegrip is van meet af aan so gekonstrueer dat dít wat kontinu is, sig aan die greep daarvan onttrek, want volgens Cantor handel dit inderdaad by elke versameling oor ’n “samevatting van wel-onderskeie dinge ... die diskrete heers.”) (Laugwitz 1986:10)

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za



Bibliografie

Ahrens, W. 1916. *Mathematiker-Anekdoten*. Leipzig en Berlyn: B.G. Teubner.

Augustinus, A. 1991. *Confessions* (vert. Henry Chadwick). Oxford: Oxford University Press.

—. 2002. *De trinitate*, Engelse seleksies, boek 8–15 (vert. Stephen McKenna). Cambridge: Cambridge University Press.

Benacerraf, P. en H. Putnam (reds.). 1964. *Philosophy of mathematics*, *selected readings*. Oxford: Basil Blackwell.

Bernays, P. 1976. *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Böhme, G. 1966. Unendlichkeit und Kontinuität. *Philosophia Naturalis*, 11:304–17.

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

Bolzano, B. 1920. *Paradoxien des Unendlichen* (1851). Leipzig: Reclam.

Cantor, G. 1887–1888. Mitteilungen zur Lehre von Transfiniten. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 91:81–125; 92:240–65.

—. 1895–1897. Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 46:481–512 [1895]; Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 49:207-46 [1897].

—. 1962. *Gesammelte Abhandlungen Mathematischen und Philosophischen Inhalts* (1932). Hildesheim: Oldenburg Verlag.

Dummett, M.A.E. 1978. *Elements of intuitionism*. Oxford: Clarendon Press.

—. 1995. *Frege: Philosophy of mathematics*. Tweede uitgawe. Cambridge: Harvard University Press.

Felgner, U. (red.). 1979. *Mengenlehre*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Fraenkel, A. 1928. *Einleitung in die Mengenlehre*. Derde uitgawe. Berlyn: Springer.

Fraenkel, A., Y. Bar-Hillel, A. Levy en D. van Dalen. 1973. *Foundations of set theory*. Tweede uitgawe. Amsterdam: North-Holland.

Frege, G. 1884. *Grundlagen der Arithmetik* (onveranderde herdruk 1934). Breslau: Uitgewery M. & H. Marcus.

—.1979*. Posthumous writings*. Oxford: Basil Blackwell.

Gödel, K. 1964. What is Cantor's continuum problem? In Benacerraf en Putnam (reds.) 1964.

Gosztonyi, A. 1976. *Der Raum*: *Geschichte seiner Probleme in Philosophie und Wissenschaften (Vol. I & II)*. Freiburg: Alber.

Grünbaum, A. 1952. A consistent conception of the extended linear continuum as an aggregate of unextended elements. *Philosophy of Science*, 19(2):288–306.

Grünfeld, J. 1983. Euclidean Nostalgia. *International Logic Review*, 27:41–50.

Hawking, S. 2005. *God created the integers*: *The mathematical breakthroughs that changed history*. Londen: Penguin Books.

Hersh, R. 1997. *What is mathematics really*? Oxford: Oxford University Press.

Heyting, A. 1971. *Intuitionism – an introduction*. Amsterdam: North Holland.

Hilbert, D. 1925. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 95:161–90.

Husserl, E. 1970. *Philosophie der Arithmetik mit erganzenden Texten 1890–1901* (1891). Den Haag: Nijhoff.

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

—. 1979. *Aufsätze und Rezensionen (1890–1910), Husserliana, Edmund Husserl, Gesammelte Werke, Volume XXII*. Den Haag: Martinus Nijhoff.

Kant, I. 1956. *Kritik der reinen Vernunft* (1787). Tweede uitgawe. Hamburg: Felix Meiner.

Laugwitz, D. 1986. *Zahlen und Kontinuum*. *Eine Einführung in die Infinitesimalmathematik*. Mannheim: B.I.-Wissenschaftsverlag.

—. 1997. Mathematische Modelle zum Kontinuum und zur Kontinuität. *Philosophia Naturalis*, 34:265–313.

Longo, G. 2001. The mathematical continuum: From intuition to logic. ftp://ftp.di.ens.fr/pub/users/longo/PhilosophyAndCognition/the-continuum.pdf (19 Oktober 2010 geraadpleeg).

Lorenzen, P. 1952. Über die Widerspruchfreiheit des Unendlichkeitsbegriffes. Studium Generale, *Zeitschrift für die Einheit der Wissenschaft und im Zusammenhang ihrer Begriffsbildungen und Forschungsmethoden*, 10:592–5.

—. 1972. Methodisches Denken. In Meschkowski (red.) 1972a.

Maddy, P. 2005. *Naturalism in mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Maier, A. 1964. Diskussion über das Aktuell Unendlichen in der ersten Hälfte des 14. Jahrhunderts. *Ausgehendes Mittelalter*, Vol. I. Rome: Edizioni di storia e letteratura.

Maimon, S. 2004. *Versuch über die Transzendentalphilosophie* (1790). Hamburg: Felix Meinre.

McKeon, K. (red.). 2001. *The basic works of Aristotle*. New York: The Modern Library.

Meschkowski, H. 1967. *Probleme des Unendlichen*. *Werk und Leben Cantors*. Braunschweig: Friederich Vieweg & Sohn.

—. 1972a (red.). *Grundlagen der modernen Mathematik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

—. 1972b. Der Beitrag der Mengenlehre zur Grundlagenforschung. In Meschkowski (red.) 1972a.

Monk, J.D. 1970. On the foundations of set theory. *The American Mathematical Monthly*, 77.

Plotinus. 1969. *The Enneads* (vert. Stephen MacKenna). Londen: Faber.

Riedweg, C. 2005. *Pythagoras*: *His life*, *teaching*, *and influence*. Ithaca: Cornell University Press.

Robinson, A. 1966. *Non-standard analysis*. Amsterdam: North-Holland.

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

—. 1979. *Selected papers of Abraham Robinson*. New Haven: Yale University Press.

Shapiro, S. 1997. *Philosophy of mathematics*, *structure and ontology*. Oxford: Oxford University Press.

Skolem, T. 1922. Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. In Felgner (red.) 1979.

Strauss, D.F.M. 1988. The nature of mathematics and its supposed arithmetization. In *Proceedings*, Ninth National Congress on Mathematics Education, Mathematical Association of South Africa.

—. 1991. The ontological status of the principle of the excluded middle. *Philosophia Mathematica* II, 6(1):73–90.

—. 2002a. The ontological status of the principle of the excluded middle. *Philosophia Mathematica* II, 6(1):73–90.

—. 2002b. Philosophical reflections on continuity. *Acta Academica*, 34(3):1–32.

—. 2003a. Frege's attack on "abstraction" and his defense of the "applicability" of arithmetic (as part of logic). *South African Journal of Philosophy*, 22(1):63–80.

—. 2003b. How "rational" is "rationality"? *South African Journal of Philosophy*, 22(3):63–80.

—. 2005a. Accounting for primitive terms in mathematics. *Koers*, 70(3):515–34.

—. 2005b. Systematic perspectives on diverging mathematical orientations. *Koers*, 70(4):631–60.

—. 2006a. The concept of number: Multiplicity and succession between cardinality and ordinality. *South African Journal of Philosophy*, 25(1)27–47.

—. 2006b. The possibilities of the human intellect and the limitations of computing devices. *New Generations Sciences*, 4(2):46–65.

—. 2007a. Die Grenzen der Logik übersteigen: Zum Unterschied zwischen Widerspruch und Antinomie (Transcending logic: The difference between contradiction and antinomy). *Suid-Afrikaanse Tydskrif vir Natuurwetenskap en Tegnologie*, 26(1):37–61.

—. 2007b. Is a straight line the shortest distance between two points and does 2 + 2 equal 4? *Journal for Christian Scholarship*, 43(3&4):51–72.

—. 2009a. The significance of a non-reductionist ontology for the discipline of mathematics: A historical and systematic analysis. *Axiomathes*: *An International Journal in Ontology and Cognitive Systems*, 20:19–52.

—. 2009b. *Philosophy*: *Discipline of the disciplines*. Grand Rapids: Paideia Press.

Vaihinger, H. 1949. *The philosophy of* "as if": *A system of the theoretical*, *practical and religious fictions of mankind*. Londen: Routledge & Kegan Paul.

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

Wang, H. 1988. *Reflections on Gödel*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Weyl, H. 1921. Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. *Mathematische Zeitschrift*, 10:39–79.

—. 1966. *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. Derde uitgawe. Wene: R. Oldenburg.

Yourgrau, P. 2005. *A world without time*. *The forgotten legacy of Gödel and Einstein*. Londen: Penguin Books.

Zermelo, E. 1932. Vorwort. In Cantor 1962.

Eindnotas

[1] "Uit die paradys wat Cantor vir ons geskep het, sal niemand ons kan verdryf nie."

[2] Na aanleiding van nie-aftelbaarheid kan sydelings opgemerk word dat Grünbaum byvoorbeeld na 'n eindige interval (a, b) verwys wat in die grensgeval (as a = b) "degenerate" heet (met lengte zero). Op grond van die nie-aftelbaarheid van reële getalle argumenteer Grünbaum dan dat 'n positiewe interval as die vereniging van 'n kontinuum van gedegenereerde intervalle gesien kan word, en wel deur gebruik te maak van die verskil tussen getalsoptelling en versamelingsteoretiese optelling, waardeur tot die gevolgtrekking gekom word dat die uitgebreide lineêre kontinuum beskou kan word as 'n aggregaat van nie-uitgebreide elemente (Grünbaum 1952:300ff). Elders het ek aangetoon dat hierdie argument 'n sirkelredenasie bevat, aangesien nie-aftelbaarheid slegs met behulp van die "opeens oneindige" (vgl. paragraaf 15 en 16 hier onder waar hierdie uitdrukking onder meer verduidelik word) aangetoon kan word, terwyl die opeens oneindige die onherleibaarheid van ruimte tot getal veronderstel (sien Strauss (1988:23ff)). Vgl. eindnota 46 hier onder.

[3] Cantor bestempel die kleinste transfiniete kardinale getal as *Alef-Nul* ($\aleph_0$) en dan blyk dit dat $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$; $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$; $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$; maar $2^{\aleph_0} > \aleph_0$. Ordinale getalle let op die orde van opeenvolging tussen getalle (dit het betrekking op die vraag: die *hoeveelste*?), terwyl kardinale getalle afsien van die volgorde en bloot let op die aantal (die vraag: *hoeveel*?) (sien Strauss (2006a)). Cantor het die ry transfiniete Alefs gesien as "trappe tot die troon van God"!

[4] In relasie tot versamelings beskou Cantor die heelgetalle en ordeningstipes as egte universalia in die sin van die klassieke Middeleeuse stryd tussen die realisme en die nominalisme.

[5] Von Neuman het byvoorbeeld met behulp van ordinale getalle 'n alternatiewe aksiomatisering daargestel, terwyl Ackermann en Bernays ook verskillende aksiomatiserings ontwikkel het. As heruitgewer van die "Gesammelte Abhandlungen" van Cantor skryf Zermelo daarom tereg in die voorwoord (sien Zermelo (1932)): "In die geskiedenis van die wetenskappe is dit sekerlik 'n seldsame geval wanneer 'n ganse wetenskaplike dissipline van grondleggende betekenis aan die skeppende werk van 'n enkele persoon te danke is. Dit is die geval wat verwerklik is in die skepping van Georg Cantor, die versamelingsleer, 'n nuwe wetenskaplike dissipline, wat gedurende 'n tydsbestek van ongeveer 25

jaar in 'n reeks verhandelinge van een en dieselfde navorser in die grondtrekke daarvan ontwikkel is en sedertdien die blywende besit van die wetenskap geword het, sodat alle latere navorsing op hierdie gebied bloot nog as vergrotende uitbreidings ('ergänzende Ausführungen') van sy grondleggende gedagtes opgevat kan word." (Sien Cantor (1962:III).)

[6] Natuurlik sou dit blyk dat 'n ontleding van getal nie losgemaak kan word van 'n insig in die unieke aard van die ruimte nie.

[7] Hierdie vrae hou verband met die tradisionele teenstelling tussen die wiskundige platonisme en konstruktivisme. Eersgenoemde sien getalle as transendente platoniese ideë (wat ontdek moet word) en laasgenoemde as skeppinge van die menslike gees.

[8] Die term *onties* is afgelei van die Griekse woord *on*, wat dít wat bestaan aandui. Tradisioneel is die ontologie dus die leer van die syn.

[9] In 'n sekere sin sou 'n mens die omvattende teenwoordigheid van digitale tegnologie in die wêreld van vandag as 'n indirekte (en derhalwe gewysigde) segetog van die oorspronklike Pythagoriese ideaal kon beskou.

[10] "Zahlenverhältnis läßt sich geometrisch darstellen, aber nicht jedes Streckenverhältnis arithmetisch. Das begründet einen Vorrang der Geometrie vor der Arithmetik, und die Konsequenz sind die Bücher des Euklid: Die Theorie der Zahlen ist ein Teil der Geometrie" (Laugwitz 1986:9; vgl. ook sy latere artikel, Laugwitz (1997)).

[11] Die probleem van eenheid en verskeidenheid is onderliggend aan die reduksionistiese alternatiewe in die geskiedenis van die wiskunde (Strauss 2009a).

[12] "Unter einer 'Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung *M* von bestimmten wohlunterschieden Objekten *m* unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die 'Elemente' von *M* genannt werden) zu einem Ganzen." (Dit het oorspronklik in Cantor 1895–1897 verskyn.)

[13] Ek sal aanstons verduidelik waarom die term *geheel*, of *totaliteit*, 'n *ruimtelike* konnotasie besit. Voor ek dit doen, wil ek egter eers nog vir 'n oomblik stilstaan by die status van getal, gedagtig aan Maddy se bogemelde vraag: "Does 2 exist?"

[14] Hermann Weyl reageer teen die idee dat die wiskunde bloot afleidings (geldige inferensies) uit gepostuleerde aksiome maak, en maak die stelling dat dit die aard van *volledige induksie* is wat die wiskunde verhoed om in 'n geweldige toutologie te verval. Volgens hom "erscheint vom intuitionistischen Standpunkt die *vollständige Induktion* als dasjenige, was die Mathematik davon bewahrt eine ungeheure Tautologie zu sein" (Weyl 1966:86).

[15] Gödel skryf: "The operation 'set of x's' (where the variable 'x' ranges over some given kind of objects) cannot be defined satisfactorily (at least not in the present state of knowledge), but can only be paraphrased by other expressions involving again the concept of set, such as: 'multitude of x's', 'combination of any number of x's', 'part of the totality of x's', where a 'multitude' ('combination', 'part') is conceived as something that exists in itself, no matter whether we can define it in a finite number of words (so that random sets are not excluded) (Gödel 1964:262).

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

[16] "Wenn wir die Zahl durch Zusammenfassung von verschiedenen Gegenständen entstehen lassen wollen, so erhalten wir eine Anhäufung, in der die Gegenstände mit eben den Eigenschaften enthalten sind, durch die sie sich unterscheiden, und das ist nicht die Zahl. Wenn wir die Zahl andererseits durch Zusammenfassung von Gleichem bilden wollen, so fließt dies immerfort in eins zusammen, und wir kommen nie zu einer Mehrheit" (Frege 1884:50). (Vgl. Strauss (2003a) vir 'n omvattende analise van Frege se denke oor getal.)

[17] "Ein Plural ist nur von Begriffswörtern möglich. Wenn man also von 'Einheiten' spricht, so kann man dies Wort nicht gleichbedeutend mit dem Eigennamen 'Eins' gebrauchen, sondern als Begriffswort. Wenn 'Einheit' 'zu zählender Gegenstand' bedeutet, so kann man nicht Zahl als Einheiten definieren" (Frege 1884:50).

[18] Hy meen immers "dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthalte" ("dat die aangee van 'n getal 'n uitspraak oor 'n begrip bevat") (Frege 1884:59). Hierdie siening is kenmerkend van sy *logisisme*, wat eers in die onhoudbaarheid daarvan in die lig gestel is toe Russel (en Zermelo onafhanklik van hom – vgl. Husserl (1979:xxii, 399ff)) die nou algemeen bekende onhoudbaarheid van die naïewe versamelingsbegrip blootgelê het (as C die versameling van alle versamelings is wat hulself nie as element bevat nie, dan is C 'n element van C as en slegs as C nie 'n element van C is nie). Frege het aanvanklik aritmetisisties gedink: "Lê die basis van die aritmetiek nie dieper as alle ervaringskennis, selfs dieper as die meetkunde nie?" ("Liegt nicht der Grund der Arithmetik tiefer als der alles Erfahrungswissens, tiefer selbst als der Geometrie?" (Frege 1884:44)). Ná die prysgawe van sy logisistiese program het Frege egter teen die einde van sy lewe (1924-1925) die sirkel voltooi en teruggekeer na die Griekse opvatting dat die wiskunde eintlik geometrie is: "So an a priori mode of cognition must be involved here. But this cognition does not have to flow from purely logical principles, as I originally assumed. There is the further possibility that it has a geometrical source. ... The more I have thought the matter over, the more convinced I have become that arithmetic and geometry have developed on the same basis – a geometrical one in fact – so that mathematics in its entirety is really geometry" (Frege 1979:277).

[19] Die omskrywing wat Bolzano van 'n versameling gee, gebruik nog hierdie problematiese idee van "ene" – hy praat van "Mengen von Einheiten" (Bolzano 1920:2).

[20] Dink byvoorbeeld aan tipiese ruimtelike vorme (die 32 kristalklasse) of aan tipiese getalle (of konstantes), soos die "werkingskwantum" van Planck. Hy het in 1900 bekendheid verwerf deur sy ontdekking van die minimale energie-eenheid, die "kwantum" *h*. Om rekenskap te kon gee van die diskrete aard van die emissie en absorpsie van energie het hy gepostuleer dat stralingsenergie gekwantifiseer is proporsioneel tot die frekwensie *v* in die formule $E = hnv$, waar *n* 'n heelgetal is, *v* die frekwensie en *h* die "kwantum van aksie" (Wirkungsquantum), met die *getal*waarde $6{,}624 \times 10^{-34}$. In die spesiale relatiwiteitsteorie van Einstein is die (vakuum-) snelheid van lig ook 'n konstante.

[21] Grünfeld merk byvoorbeeld op: "The formalist tenet, in particular, that the laws of thought are strictly formal, that is, altogether unrelated to experience, made their application to actual phenomena a mystery." Hy meen: "Any hypothesis of why nature conforms to our mathematical calculations takes some form of pre-established harmony for granted" (Grünfeld 1983:43).

[22] Peano se bekende aksiomas het daarom tereg betrekking op alle vorme van suksessies.

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

[23] Hy verwys na die getal 1 en maak dan die stelling dat dit net so min ruimte laat vir ’n meervoudsvorm as die chemiese element goud (Frege 1884:49).

[24] “Die Mengentheoretiker sind gewöhnlich der Ansicht, dass der Begriff der ganzen Zahl definiert werden soll, und die vollständige Induktion bewiesen werden soll. Es ist aber klar, dass man nicht ins Unendliche definieren oder begründen kann; früher oder später kommt man zu dem nicht weiter Definierbaren bzw. Beweisbaren. Es ist dann nur darum zu tun, dass die ersten Anfangsgründe etwas unmittelbar Klares, Natürliches und Unzweifelhaftes sind. Diese Bedingung ist für den Begriff der ganzen Zahl und die Induktionsschlüsse erfüllt, aber entschieden nicht erfüllt für mengentheoretische Axiome der Zermelo’schen Art oder ähnliches; sollte man die Zurückführung der ersteren Begriffe auf die letzteren anerkennen, so müssten die mengentheoretischen Begriffe einfacher sein und das Denken mit ihnen unzweifelhafter als die vollständige Induktion, aber das läuft dem wirklichen Sachverhalt gänzlich zuwider.”

[25] Wanneer onherleibaarheid misken word, raak teoretiese denke verstrengel in reduksionisme en die bypassende antinomieë. Een van die hoofmotiewe van die werk oor filosofie as wetenskap van die wetenskappe is om die noodsaaklikheid van ’n niereduksionistiese ontologie te artikuleer (sien Strauss (2009b)).

[26] Daar kan terloops daarop gewys word dat wetenskaplike begripsvorming in die algemeen volledig afhanklik is van die gebruik van ondefinieerbare terme. Wetenskaplike begripsvorming bestaan dus danksy dít wat alle begrip te bowe gaan (transendeer).

[27] Ons het vroeër na die eerste vier aspekte verwys, naamlik die aritmetiese, ruimtelike, kinematiese en fisiese aspekte. Daaropvolgend kan ook onderskei word (in hul voorlopig aangeduide volgorde) tussen die biotiese aspek, sensitief-psigiese aspek, logies-analitiese aspek, kultuur-historiese aspek, teken-aspek, sosiale aspek, ekonomiese aspek, estetiese aspek, juridiese aspek, morele aspek en geloofsaspek.

[28] Die vraag of ’n lyn die kortste afstand tussen twee punte is, word in Strauss (2007b) uitvoerig bespreek.

[29] Lengte is dus ’n eerste-orde- feitelike ruimtelike uitgebreidheid, oppervlakte ’n tweede-orde-uitgebreidheid, en so meer. Om van een, twee of drie dimensies te praat, word die oorspronklike sin van getal veronderstel.

[30] Kant het reeds duidelik ingesien dat suksessie, tegelykheid en duur modi van die tyd is. “Die drei modi der Zeit sind Beharrlichkeit, Folge und Zugleichsein” (Kant 1956:219).

[31] Zermelo meld dat Hausdorff na aanleiding van Cantor se “perfekte” versamelings van “gapingloosheid” praat (sien Cantor (1962:194) en eindnota 38 hier onder).

[32] Shapiro meld dat hierdie eienskap van samehang nie streng wiskundig gedefinieer is nie, omdat dit nie omskryf kan word sonder om in ’n sirkelredenasie te verval nie. Dit is met ander woorde ’n primitiewe term: “Coherence is not a rigorously defined mathematical concept, and there is no noncircular way to characterize it” (Shapiro 1997:13).

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

[33] Aan die begin van ons besinning is verwys na die mens se fassinering met die grootsheid van die heelal. Tans kan ons opmerk dat hierdie woord implisiet saamgestel is uit die idee van ’n oneindige totaliteit – die geheel (totaliteit) en die idee van alles – die “geheel-van-alles”.

[34] “Es empfiehlt sich, die Unterscheidung von ‘arithmetischer’ und ‘geometrischer’ Anschauung nicht nach den Momenten des Räumlichen und Zeitlichen, sondern im Hinblick auf den Unterschied des Diskreten und Kontinuierlichen vorzunehmen” (Bernays 1976:81). Gevoelsruimte, byvoorbeeld die gevoeligheid vir verskillende prikkels op die menslike vel, kan ervaar word as kontinu ten spyte van die feit dat hierdie prikkels fisies diskontinu (onderskeidelik) is (sien Gosztonyi (1976:I:13)).

[35] Slegs wanneer punte op ’n lyn *getel* word, is daar sprake van suksessie – maar dan handel dit oor ’n *onderskeie hoeveelheid* punte en nie oor die kontinuïteit van die lyn waarop die punte te vinde is nie.

[36] Dit beteken dat die samehangsmomente tussen getal en ruimte, gesien vanuit die getalsaspek, “in aksie gebring word”, wat beteken dat die antisipasie van getal na ruimte “oopgemaak” of ontsluit word. Sien Strauss (2002b) in verband met die intrinsieke verband tussen die ruimtelike orde van opeens en die ruimtelike geheel-dele-relasie.

[37] Vgl. die uitdrukkings *infinitum successivum* en *infinitum simultaneum* (Maier 1964:77–9).

[38] “In der Arithmetik … liegt kein Motiv zur Einführung von Aktual-Unendlichen vor” (Lorenzen 1972:159).

[39] Daarom kan ons enige suksessief oneindige ry getalle, byvoorbeeld die natuurlike of heelgetalle, op twee maniere beskou: vanuit die perspektief van die suksessief oneindige (dan is dit ’n eindelose suksessie) of vanuit die perspektief van die opeens oneindige (dan is dit ’n voltooid oneindige totaliteit). Dit beteken dat ook enige (reële) getal ’n suksessief oneindige “benaderingsgestalte” of ’n opeens oneindige “gegewenheidsgestalte” kan aanneem. Vanuit die perspektief van die suksessief oneindige is 0,9999 … ongelyk aan 1, terwyl dit op die basis van die opeens oneindige gelyk is aan 1. Cantor definieer trouens reële getalle as aktueel oneindige (opeens oneindige) versamelings rasionale getalle. Hy maak gebruik van Alef-Nul as die eerste transfiniete kardinaliteit of magtigheid. Cantor skryf: “Tot die definisie van ’n irrasionale reële getal behoort steeds ’n welgedefinieerde oneindige versameling van die eerste magtigheid van rasionale getalle” (Cantor 1962:184).

[40] ’n Merkwaardige ambivalensie word in hierdie verband by Abraham Robinson aangetref. Aan die een kant het hy, as “invers-ekwivalent” van Cantor se transfiniete getalle, ’n niestandaard-analise ontwikkel waarin van “infinitesimale” (getalle wat oneindig klein is) gebruik gemaak word (Robinson 1966:55 e.v.), maar aan die ander kant verdedig hy die oortuiging dat “infinite totalities do not exist in any sense of the word (that is, either really or ideally)” en voeg dan daaraan toe: “More precisely, any mention, or purported mention, of infinite totalities is, literally, meaningless.” Nietemin glo hy dat die wiskunde soos normaalweg moet voortgaan: “That is, we should act as if infinite totalities really existed” (Robinson 1979:507). Ook hier word die suksessief oneindige implisiet as maatstaf gebruik om die (ontslote modale) realiteit van oneindige totaliteite te bevraagteken.

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za

[41] Husserl (1970) het homself tot die suksessief oneindige beperk. Die opvolgband van hierdie werk het egter nooit verskyn nie, omdat Husserl nie die teorie van die natuurlike getalle sonder die benutting van die opeens oneindige kon deurvoer nie.

[42] Vgl. die vorige eindnota in verband met 0,999 ... en 1, asook die oorspronklike woorde van Lorenzen: "... als ob die unendlich vielen Ziffern alle auch einmal existierten." Bernays verdedig – in teenstelling met Vaihinger met sy filosofie van die asof – dat hy ook die opeens oneindige in 'n *asof*-sin gebruik, maar dat hy niks innerlik teenstrydig (antinomies) daarmee bedoel nie (Bernays 1976:60). Bernays doen hiermee afstand van die bekende "Philosophie des Als Ob" van Vaihinger (vgl. Vaihinger (1949:61–4)). Insake die onderskeiding tussen 'n logiese teenspraak en 'n antinomie, sien Strauss (2009:256 e.v., 286 e.v.).

[43] Vgl. Heyting (1971:40), Fraenkel e.a. (1973:256, 272) en Fraenkel (1928:239), eindnota 2).

[44] Waar Aristoteles vanuit die perspektief van die ruimte-aspek argumenteer en dus genoeë neem met die suksessief oneindige, is Cantor se benadering aritmeties, en gevolglik benodig hy die verdiepte getalsin van die opeens oneindige. (Wat Cantor *samehangend* noem, het betrekking op oneindige verdeelbaarheid, en wat hy *perfek* noem, is die eweknie van 'n Dedekind-snit – vgl. Cantor (1962:194) en Böhme (1966:309).)

[45] Die "vicious circle" wat opgesluit lê in die poging (onder meer van Grünbaum in 1952) om kontinuïteit in nie-uitgebreide elemente te fundeer, word in Strauss (1988) blootgelê. Grünbaum meen dat hy ruimtelike kontinuïteit tot getal kan herlei, maar om dít te doen benodig hy die opeens oneindige, wat juis – in 'n antisiperende sin – die basis vorm van Cantor se ooraftelbaarheidsbewys (sonder dat hy besef dat nie-aftelbaarheid die onherleibaarheid van die ruimtelike tydsorde van *opeens* veronderstel. Hy skryf eksplisiet: "The consistency of the metrical analysis which I have given depends crucially on the non-denumerability of the infinite point-sets constituting the intervals on the line" (Grünbaum 1952:302). Om hierdie impasse te begryp, moet die onderliggende verskil tussen 'n logiese *kontradiksie* of teenspraak en 'n *antinomie* aan die orde gestel word – wat ek te ver sal voer. Vgl. egter Strauss (2007a) vir 'n meer uitvoerige bespreking daaroor.

[46] "Es ist nicht möglich, einen Punkt vom andern zu unterscheiden; keine Gerade oder Ebene ist vor einer anderen Gerade oder Ebene ausgezeichnet" (Laugwitz 1986:9).

[47] Dat die beginsel van die uitgeslote derde op 'n retrosipasie na 'n antisipasie verwys (die logiese aspek se terugwysing na getal wat vooruitwys na die geheel-dele-relasie in die ruimte-aspek, word aangetoon in Strauss (1991)).

ISSN 1995-5928 | Tel: 021 886 5169 | E-pos: akademies@litnet.co.za