Pascal se driehoek en L'Hôpital se reël

Pieta van Deventer

'n Mens sou buite konteks kon aanvoer "aan die opdiep van interessanthede in wiskunde is daar geen einde nie". In hierdie kort artikel word twee bekende wiskundige gereedskapstukke met enkele toepassings van elk aangetoon. Eerstens word Pascal se driehoek[1] bespreek en dit word gevolg deur 'n bespreking van L'Hospital (ook bekend as L'Hôpital) se reël.

Die eerste gedagte, nl. Pascal se driehoek, is nie net elegant en maklik om te gebruik nie, maar ook nuttig in analitiese wiskunde. Hierdie driehoek is na die Franse wiskundige Blaise Pascal vernoem, alhoewel dit reeds vroeër aan verskeie ander wiskundiges, veral in die Ooste, bekend was. Dit is niks anders as 'n eenvoudige toepassing van die binoomstelling nie. Die binoomstelling het u reeds by 'n vorige geleentheid as 'n rolspeler in die binomiaal-waarskynlikheidsmassafunksie gesien.

Om u geheue te verfris: Indien $X \sim \text{binom}(n, p)$, d.w.s. met parameters n en p, lyk die betrokke waarskynlikheidsmassafunksie soos volg:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{vir } x = 0, 1, 2, \ldots, n \\
&= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{andersins}
\end{aligned}
$$

Dit volg dus dat

$$
\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{n} f(x) &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n + \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} + \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} + \ldots \binom{n}{n} p^n (1-p)^{n-n} \\
&= \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n + \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} p^2 (1-p)^{n-(n-1)} + \binom{n}{n} p^n (1-p)^0
\end{aligned}
$$

Hierdie stelling maak dit maklik om sonder harde werk 'n uitdrukking soos $(a+3b)^8$ uit te vermenigvuldig en 'n uitdrukking soos hierdie maklik te kan neerskryf.

Beskou nou die volgende bekende uitdrukkings wat maklik kontroleerbaar is:

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

ens.

Dis geen bewys nie, maar die patroon vir die koëffisiënte van die terme in bostaande ontwikkelings vorm Pascal se driehoek, soos dit bekendstaan, en kan duidelik hier onder gesien word:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Ens.

Elke ry begin en eindig met 'n 1. Die res van die getalle is elk die som van die twee getalle direk links en direk regs bo in die vorige ry. Die eksponente in die ontwikkeling van die reeks neem term vir term toe van n af tot 0 vir a en van 0 tot n vir b. In werklikheid lyk my ontwikkeling dus soos volg:

$$(a+b)^1 = ab^0 + a^0b$$
$$(a+b)^2 = a^2b^0 + 2ab + a^0b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3b^0 + 3a^2b + 3ab^2 + a^0b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4b^0 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + a^0b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5b^0 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + a^0b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6b^0 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + a^0b^6$$

ens.

Dis nou duidelik waar die binomiaalwaarskynlikheidsmassafunksie sy naam vandaan kry, want die sommasie van die funksie hierbo is niks anders nie as die uitdrukking vir wat as die binoomstelling bekendstaan nie, nl.

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{n}(a+b)^x &= \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}a^x b^{n-x} \\
&= \binom{n}{0}a^0 b^n + \binom{n}{1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{2}a^2 b^{n-2} + \ldots \binom{n}{n}a^n b^{n-n}
\end{aligned}$$

of van regs af, dit maak geen verskil nie,

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n \\
&= a^n + na^{n-1}b^1 + \frac{n!}{2!(n-2)!}a^{n-2}b^2 + \frac{n!}{3!(n-3)!}a^{n-3}b^3 + \ldots \binom{n}{n}a^0 b^n \\
&= a^n + na^{n-1}b^1 + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots \binom{n}{n}a^0 b^n
\end{aligned}$$

Die laaste twee rye van bostaande uitdrukkings is maar net vereenvoudigings en is nie werklik deel van die binoomstelling nie.

Nou is die gestelde uitbreiding op bladsy 1

$$\begin{aligned}
(a+3b)^8 = a^8 + 8a^7(3b)^1 + 28a^6(3b)^2 + 56a^5(3b)^3 + 70a^4(3b)^4 + 56a^3(3b)^5 \\
+ 28a^2(3b)^6 + 8a(3b)^7 + (3b)^8
\end{aligned}$$

Een belangrike toepassing van hierdie stelling kom in die binomiaalverdeling voor, waar bewys moet word dat al die moontlike waarskynlikhede na een optel. Dis een van die vernaamste vereistes vir die geldigheid van ’n waarskynlikheidmassafunksie.

$\sum_{x=0}^{n} f(x) = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$. Vir $a = p$ en $b = 1-p$ volg die vereenvoudiging

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x} \\
&= (p+(1-p))^n \\
&= 1
\end{aligned}$$

Op soortgelyke wyse kan die populasie-“gemiddelde”, beter bekend as die verwagte waarde of $E(X)$[2], afgelei word as

[2] Voorlopig: Die verwagte waarde van $g(x)$ t.o.v. $f(x)$ is $\sum g(x)f(x)$ of $\int g(x)f(x)dx$, afhangende van of x diskreet of kontinu is.

$$
\begin{aligned}
E(X) = \sum_{x=0}^{n} x f(x) &= \sum_{x=1}^{n} x \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \text{ die eerste term verval weens die produk met 0.} \\
&= \sum_{x=1}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{(hou in gedagte dat 0!=1)} \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \sum_{x=1}^{n} \frac{pn(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \\
&= pn \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} (1-p)^{n-x} \quad \text{(let op} (n-1)-(x-1)=n-x) \\
&= np\left(p+(1-p)\right)^n \text{ (Vreemd? Toets dit gerus deur dit in} \\
&= np \qquad \text{besonderhede uit te skryf uit met } n=3\text{. Dit werk.)}
\end{aligned}
$$

Dink weer aan die verwagte waarde van die 600 rolle met ’n dobbelsteen. Die verwagte aantal sesse is $np = 600 \times \frac{1}{6} = 100$.

Die populasie-“gemiddelde”[3] vir die meeste diskrete waarskynlikheidsmassaverdelings kan op dieselfde manier bepaal word. In die geval van kontinue waarskynlikheidsdigtheids-funksies word integrasie gebruik. Die vereenvoudigings kan soms nogal lastig word, maar daar is verskeie ander maniere om verwagte waardes mee te bepaal. Die verwagte waarde begrip sal by ’n volgende geleentheid in meer besonderhede bespreek word.Verwagte waardes speel ’n groot rol in wiskunde en statistiek. Genererende funksies, ook genoem voortbringende funksies, soos momentvoortbringende funksies, Fourier-reekse, Laplace-transformasies en ander soortgelykes is almal vorme van verwagte waardes.

Terug by die binoomstelling. Moet n noodwendig heeltallig wees? Nee, nie noodwendig nie, maar normaalweg word dit so toegepas. Wat is ’n billike benadering vir $\sqrt{1.01224}$ sonder om van ’n sakrekenaar gebruik te maak? Benader die vraag in die algemeen deur te vra hoe $\sqrt{1+y}$ geskryf kan word. ’n Baie belangrik vereiste in die volgende uitbreiding is dat ’n mens moet seker maak dat $-1 < y < 1$. Dis ’n absolute vereiste. Stel $y = 2x$, dan is

[3] Let op die verskil tussen die $E(X)$ en die rekenkundige gemiddelde, $\overline{x}$. $E(X)$ is die populasie se “ware” gemiddelde en $\overline{x}$ is die waargenome steekproef se gemiddelde. Dis nie die volle verhaal nie, maar illustreer wel die gedagte.

$$\sqrt{(1+2x)} = (1+2x)^{\frac{1}{2}} \text{ met } \left\{a^n + na^{n-1}b^1 + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots\right\}$$

$$= (1+(2x))^{\frac{1}{2}}$$

$$= 1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}1^{\frac{1}{2}-1}(2x)^1 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}1^{\frac{1}{2}-2}(2x)^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}1^{\frac{1}{2}-3}(2x)^3 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{4!}1^{\frac{1}{2}-4}(2x)^4 + \ldots$$

$$= 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\left(\frac{1}{2}-4\right)}{4!}(2x)\cdot\frac{1}{2}x^3 + \ldots$$

$$= 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \text{kleiner wordende waardes as } x \text{ klein is.}$$

$$\doteq 1 + x$$

sodat $\sqrt{1.01224} \doteq 1 + \frac{0.01224}{2} = 1.00612$. Die werklike oplossing is $1.006101387\ldots$ Dit is dus glad nie 'n swak benadering nie.

Daar is natuurlik niks wat 'n mens verhinder om die Taylor- of Maclaurin-reeks te gebruik om 'n soortgelyke resultaat te kry nie, soos in 'n vorige artikel aangedui.[4]

'n Verdere nuttige gereedskapstuk in die wiskundige se arsenaal is L'Hopital se reël. Hierdie reël is, soos Pascal se driehoek, ook na 'n Franse wiskundige, Guillaume de L'Hôpital, vernoem. Dit gebeur dikwels dat 'n mens sogenaamde ongedefinieerde uitdrukkings teëkom. Dit is uitdrukkings wat uitloop op $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{1}{0}$ en so meer. Beskou as voorbeeld $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{x^2}$, wat duidelik nie goed vereenvoudig nie. L'Hopital se reël is afkomstig van werk deur Johann Bernoulli iewers tussen 1690 en 1695, vermoedelik 1694. Dis maklik om die reël toe te pas om uit slaggate soos bogenoemde te kan kom, op voorwaarde dat $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ bestaan. Soms is dit nodig om sekere uitdrukkings te manipuleer om so 'n kwosiënt te vorm.

L'Hôpital se reël sê dat indien daar aan die voorwaarde voldoen word, is

$$\lim_{x\to\text{konstante}}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\text{konstante}}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bepaal die afgeleide van die noemer en teller afsonderlik en toets of die antwoord nóú geldig is. Indien nie, herhaal die prosedure en bestudeer die resultaat telkens en kyk of dit dalk tot iets sinvol lei.

[4] https://www.litnet.co.za/wp-content/uploads/2020/02/7-Taylor-se-reeks-deltametode-ingesluit-korreksies-no-1-2020-02-13.pdf

Indien nodig, en mits daar aan die voorwaarde voldoen word, is hierdie proses dus repeterend toepaslik. Beskou nou die geval in die vorige paragraaf:

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{x^2}=\frac{e^{-1}}{0^2}$, wat duidelik onaanvaarbaar is, maar

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}}{2x}$, wat nog nie die probleem oplos nie. Herhaal die prosedure, dan is

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}}{2x}$, herhaal prosedure sodat

$$=\lim_{x\to 0}\frac{+e^{-x}}{2}=\frac{e^0}{1}=\frac{1}{2}.$$

Dit is ’n baie eenvoudige reël om toe te pas, maar wonderlik nuttig. Soos in enige soortgelyke tegniek is daar natuurlik die lastige funksies wat op hulself terugkeer en ander probleme het, maar dis meer die uitsondering as die reël en ons gaan nie nou daarop in hoe ’n mens in sulke gevalle te werk sou gaan nie. Nog enkele voorbeelde word net ter illustrasie gegee. Verwys ook na die voetnota[5].

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^3+e^x}{e^x+2} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-9x^2+e^x}{e^x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-18x+e^x}{e^x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{24x-18+e^x}{e^x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{24+e^x}{e^x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(e^{x-x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(e^0\right)=1$$

In sommige situasies is dit nodig om die uitdrukking ’n bietjie te manipuleer.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \qquad \left(0\cdot -\infty=\frac{-\infty}{\infty}?\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\frac{-x^2}{1}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}(-x)$$

$$=0$$

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/L%27H%C3%B4pital%27s_rule

Een situasie wat herhaaldelik opduik, is die geval $x^n e^{-x}$ as $x \to \infty$. Beskou hierdie geval kortliks.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x} \\
&= \ldots \\
&= n!\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} \\
&= n!\times 0
\end{aligned}$$

Indien *n* nie heeltallig is nie, is die antwoord -0, vir wat dit mag werd wees. Beskou 'n laaste voorbeeld:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin(2x)}{x - \sin x} && \left(\frac{0}{0}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2\cos(2x)}{\cos x} && \left(\frac{0}{0}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 4\sin(2x)}{\sin x} && \left(\frac{0}{0}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 8\cos(2x)}{\cos x} \\
&= 6
\end{aligned}$$

In hierdie artikel is twee baie handige tegnieke bespreek en ek vertrou dat u waarde daaruit sal put. Beide hierdie tegnieke het al op verskillende terreine in teoretiese sowel as toegepaste wiskunde 'n groot rol gespeel. Daar is ook kortliks na die beginsel van verwagte waardes en genererende funksies, wat onontbeerlik in wiskunde is, verwys. Dit is genoeg motivering om in die nabye toekoms daaraan aandag te gee. Dis nie net belangrik vir voornemende studente in die finansiële wêreld nie, maar net soveel vir potensiële aktuarisse en ingenieurs. Hierbenewens is dit relatief eenvoudig om te gebruik, soos hierbo vir Pascal se driehoek en L'Hôpital se reël aangetoon. Hierdie tegnieke is nie net belangrik weens die nut daarvan nie, maar ook weens die elegansie en mooiheid daarvan.