Spel met grondtalle

Pieta van Deventer

Hier bespreek ons 'n lastige probleem wat belangrike wiskundige beginsels na vore bring.

Dis grendeltyd en toe stuur my dogter die volgende probleem vir my op my selfoon: Drie sirkels wat gevul moet word met enige drie van die getalle 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Die som van die drie getalle moet 30 wees. Lastig nè? Haar oplossing was om die 9 om te keer na 'n 6 met oplossing $6+11+13=30.$ Op hierdie manier is daar nou verskeie soortgelyke oplossings.

Ek dink egter nie dis regtig die gedagte nie. Die probleem wat dadelik opval, is dat die som van drie onewe getalle op geen manier 'n ewe totaal kan gee nie. Hier is 'n slang in die gras. Die slang, of laat ons liewer sê truukster, is die opsteller van die vraag. Hy/sy is nie heeltemal eerlik nie. Hoe so? Daar word nie gesê dat die getal aan die regterkant nie met die grondtal 10 werk soos waaraan ons gewoond is nie.

Voor ons by die oplossing van die probleem kom, moet ons verduidelik wat met die begrip *grondtal* bedoel word en hoe 'n mens daarmee te werk gaan. Dis dan die basis van hierdie artikel.

My ouer broer het jare gelede agtergekom (om en by 1962) dat sy bejaarde skoonpa – hy was 'n groenteboer – se syferwerk nie vir hom sin maak nie. Na 'n redelike uitvraery het hy besef dat die man uit 'n baie godsdienstige omgewing kom, 'n omgewing waar sewe as die volmaakte getal beskou is. Hy het groot geword met 'n getallestelsel waar 7 die grondtal is – uiters ongewoon. In Suid-Afrika het ons ook, nes in Brittanje, met 'n baie komplekse tweeledige grondtal van 12 en 20 in ons finansiële omgewing gewerk en niks snaaks daarvan gedink nie. Ponde, sjielings en pennies met 12 pennies in 'n sjieling en 20 sjielings in 'n pond en 21 sjielings in 'n ghienie was die standaard. So ook was daar 12 duim in 'n voet, en daar is steeds 12 eiers in 'n dosyn asook 144 eiers in 'n gros, om nie te praat van die sogenaamde aptekersdosyn van 13 nie. Verder was daar 3 voet, of dan 36 duim, in 'n tree en 1 760 treë in 'n myl, om nie te praat van 8 furlongs in 'n myl en die Britse "stones" nie, een "stone" synde 14 pond, wat weer gelyk is aan 16 onse elk, en ook die "centiweight" wat 112 pond was en waarin o.a. die gewig van klokke wat in Brittanje gegiet is, aangegee is. Dan is daar die Kaapse voet en morg en die seeknoop. Ons gebruik steeds 60 sekondes in 'n minuut, 24 uur per dag, 7 dae per week, 12 halftone in 'n oktaaf, en so kan ek voortgaan – maar aan al hierdie dinge kan ons bitter weinig doen.[1] In die V.S.A. word die myl[2] vir afstand en die gallon vir vloeistofvolumemaat nog steeds gebruik. Dis nou nie die ou gelling met 8 pinte wat ons gebruik het nie, maar 'n kleiner inhoudsmaat. Ons is spesialiste in modulêre wiskunde sonder dat ons eens die woord *modulêr* in hierdie konteks ken. Ons neem dit ook waar in die geweldig interessante sikliese groepe wat onder andere in musiektegnologie en in kristallografie voorkom.

Die lewe het baie vereenvoudig met die aanvaarding van die desimale stelsel van rand en sent, en so ook die meter en kilometer, oftewel die metrieke stelsel, wat maar so kort gelede

[1] Anderdag meer oor hierdie komplekse sisteem wat ons musiek noem in wiskundige formaat.
[2] Sekerlik verreweg die oudste afstandsmaat bekend as ons vir Koos Kombuis in *The secret diary of God*, 2003, Zebra Press, Kaapstad, bl 31 ernstig moet opneem.

soos 1961 deur wetgewing in Suid-Afrika vasgemaak is. Hierdie maatstawwe werk deurgaans met die grondtal 10.

Nou wat het die begrip grondtal hiermee te doen? Onthou nou dat y^x beteken dat y x keer met homself vermenigvuldig word, asook dat vir enige $y, y^0 = 1$[3]. In die geval van y^x is y die grondtal en x die eksponent. Soms word die woord *mag* i.p.v. *eksponent* gebruik, maar in werklikheid is die getal y^x in sy totaliteit die mag. Dus het ons hier ietwat van ’n grys area in die vaktaal. So is $4^6 = 4\times4\times4\times4\times4\times4.$ Beskou nou enige getal, soos 7 504. Wat dit in werklikheid in ons grondtal 10-benadering beteken, is dat

$$7504 = 7000 + 500 + 00 + 4 = 7\times10^3 + 5\times10^2 + 0\times10^1 + 4\times10^0 .$$

Let op dat die koëffisiënte van 10^x vir enige x nie meer as 9 kan wees nie, want sodra dit meer as 9 word, voeg ons 1 by die eksponent x, d.w.s. $10\times10^x = 1\times10^{x+1}$. So byvoorbeeld word 10×10^7 net eenvoudig 1×10^8. Dis ’n baie belangrike gedagte waarna ons ’n bietjie later terugkom en herhaaldelik gebruik.

Ons kan ook 2 as ’n grondtal gebruik waar die koëffisiënt nie meer as 1 kan wees nie. Dieselfde geld vir die grondtal x waar die koëffisiënt hoogstens $(x-1)$ kan wees. Hoekom so ’n stelsel? Hierdie benadering staan bekend as die binêre stelsel en is die grondslag waarop die werking van alle rekenaars berus. ’n Skakelaar kan slegs aangeskakel of afgeskakel wees. As dit aangeskakel is, word dit deur ’n 1 voorgestel, en as dit afgeskakel is, deur ’n 0. Daar is geen ander moontlikhede nie en ’n rekenaar se werking bestaan slegs uit die beheer van ’n magdom skakelaars. Ons sien dit ook in die syfers wat voorkom wanneer na eienskappe van rekenaars verwys word, soos 8, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 ens., selfs tot by die heksadesimale stelsel, laasgenoemde met onderliggende grondtal 16 wat almal magte van 2 behels. As voorbeeld: Hoe sal die getal 12 in grondtal 10, oftewel 12_{10} in grondtal 2, d.w.s. die binêre stelsel, dan daar uitsien? Let op dat die onderskrif die grondtal gee van die numeriese voorstelling. Vra jouself af 2 tot watter mag (eksponent) is die grootste getal kleiner as 12_{10} wat so is dat as ek 1 by die eksponent sou voeg, ek ’n getal groter as 12_{10} sou kry. In hierdie geval is die eksponent 3, want $2^3 = 8_{10} < 12_{10}$, maar $2^4 = 16_{10} > 12_{10}$. Wanneer ek nou $2^3 = 8_{10}$ gebruik, bly daar nog 4_{10} oor om die 12_{10} vol te maak. Verder weet ons $2^2 = 4_{10}$. Dus is

$$12_{10} = 8_{10} + 4_{10} = 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 0\times2^0 = 1100_2 .$$

Let op die belangrike rol van die nulle as plekhouers op dieselfde wyse as by die desimale stelsel, d.w.s. met grondtal 10. Dit bewys weer vir ons dat nul nie niks nie! ’n Eenvoudige resepmatige benadering wat ongelukkig geen insig gee in hoekom die antwoord “werk” nie lyk soos volg:

[3] Die bewys hiervoor is in werklikheid verstommend eenvoudig as jy bekend is met die gamma-integraal, maar ons sal nie nou daarop ingaan nie.

$$
\begin{aligned}
12 \div 2 &= 6 \text{ res } 0 \\
6 \div 2 &= 3 \text{ res } 0 \\
3 \div 2 &= 1 \text{ res } 1 \\
1 \div 2 &= 0 \text{ res } 1 \text{ (werk tot die kwosiënt 0 is)}
\end{aligned}
$$

Gebruik die reswaardes van onder tot bo en skryf soos hier bo:

$$12_{10} = 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 0\times 2^0 = 1100_2$$

Dinge raak effe lastiger met syfers na die desimale punt. Ons weet nou dat $45.326_{10} = 4\times 10^1 + 5\times 10^0 + 3\times 10^{-1} + 2\times 10^{-2} + 6\times 10^{-3}$. Hoe sou 45.326_{10} in die binêre stelsel lyk? Ons werk van die desimale punt weerskante toe. Let op dat die term *desimale punt* nou net by grondtal 10 geld. Miskien kan ons van die *binêre punt* by grondtal 2 praat, en verder noem ons dit net die (skeidings-) punt.

Beskou eers die getal 45_{10}. Druk hierdie getal uit as 'n som van veelvoude van magte van 2. Dit sal dan wees

$$
\begin{aligned}
45_{10} &= 1\times 32_{10} + 1\times 8_{10} + 1\times 2_{10} + 1\times 1_{10} \\
&= 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 \\
&= 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 0\times 2^0 + 1\times 2^1 + 1\times 2^0 \, . \\
&= 101010_2
\end{aligned}
$$

Beskou nou die syfers ná die punt. Dan sou ons die volgende metode kon probeer:

$$
\begin{aligned}
.326_{10} &= \frac{326_{10}}{1000_{10}} = \frac{256_{10} + 70_{10}}{1000_{10}} \\
&= \frac{2^8 + 70_{10}}{1000_{10}} = \frac{2^8 + 64_{10} + 6_{10}}{1000_{10}} \\
&= \frac{2^8 + 2^6 + 6_{10}}{1000_{10}} \\
&= \frac{2^8 + 2^6 + 2^2 + 2^1}{1000_{10}} \\
&= \frac{1\times 2^8 + 0\times 2^7 + 1\times 2^6 + 0\times 2^5 + 0\times 2^4 + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0}{1000_{10}} \\
&= \frac{101000110_2}{1000_{10}}
\end{aligned}
$$

Hier het ons nou 'n probleem met 1000_{10}, want laasgenoemde is 1111101000_2. Indien 1000_{10} direk as 'n mag van 2 neergeskryf kon word, was dit geen probleem nie, want dan kon 'n mens term vir term die breuk vereenvoudig en dan was ons kop deur. Dis egter nie die geval nie. Hierdie breuk is dus moeilik om te hanteer. Dus, i.p.v. hierdie metode gee ek nou 'n resep aan hoe om 0.326_{10} in binêre vorm te skryf. Ek is ernstig gekant teen resepmatige oplossings, maar hier maak ek ’n uitsondering, omdat die uiteensetting van die motivering effens lank is. Indien u die motivering vir hierdie tegniek wil verstaan, nooi ek u uit om dit hier na te gaan: https://indepth.dev/the-simple-math-behind-decimal-binary-conversion-algorithms. Dis werklik aan te beveel. Dit is inderwaarheid net ’n voortsetting van die kort resep wat hier bo aangegee is, maar in ’n omgekeerde formaat omdat ons met waardes kleiner as 0 werk.

$0.652 \times 2 = 1.304 \rightarrow 1$ is die integer gedeelte. Gebruik net die desimale gedeelte en bereken
$0.304 \times 2 = 0.608 \rightarrow 0$ is die integer gedeelte, bereken
$0.608 \times 2 = 1.216 \rightarrow 1$ is die integer gedeelte, bereken
$0.216 \times 2 = 0.432 \rightarrow 0$ is die integer gedeelte, bereken
$0.432 \times 2 = 0.864 \rightarrow 0$ is die integer gedeelte, bereken
$0.864 \times 2 = 1.728 \rightarrow 1$ is die integer gedeelte, bereken
$0.728 \times 2 = 0.432 \rightarrow 0$ is die integer gedeelte, bereken
$0.432 \times 2 = 0.864 \rightarrow 0$ is die integer gedeelte, bereken
$0.864 \times 2 = 1.728 \rightarrow 1$ is die integer gedeelte, bereken
$0.728 \times 2 = 1.456 \rightarrow 1$ is die integer gedeelte, bereken
$0.456 \times 2 = 0.912 \rightarrow 1$ is die integer gedeelte, bereken$\ldots$
ens. ens.

Gebruik nou die integers van bo na onder. (Vergelyk met die resep vir getalle groter as 0.) Dan is $0.652_{10} \doteq 0.10100100111_2$. Soos aangedui, is die antwoord slegs benaderd, omdat 1000_{10} nie as ’n mag van 2 geskryf kan word nie, d.w.s daar bestaan nie ’n heeltallige x waarvoor $1000_{10} = 2^x_{10}$ nie. Dus kan 0.652 nie as ’n eindigende getal in binêre vorm geskryf word nie. Dus het ons nou dat $45.652_{10} \doteq 101010.10100100111_2$.

Dit is wel so dat hierdie skryfwyse verwarrend voorkom. Ons veronderstel in die getal 2^8 dat die 2 en die 8 beide met grondtal 10 geskryf is, maar dis nêrens aangedui nie. Tegnies moet ’n mens eintlik in hierdie omstandighede die grondtalle deurgaans aandui, soos volg: $2_{10}^{8_{10}}$, maar dis duidelik dat so iets net die sinne kan verwar en dus word dit selde indien ooit so gedoen, en ons aanvaar uit die konteks dat dit wel so is. Indien daar geen onderskrif is nie, word 10 as die grondtal veronderstel.

Nou beskou ons weer die eerste paragraaf. Beskou die getal 30_*. Deur inspeksie m.b.v. verskillende grondtalle probeer ons op die volgende wyse vasstel wat 30_* se werklike waarde is deur toetsing vir verskillende waardes van te gebruik. Die 3 beteken dadelik dat die grondtal meer as 3 moet wees. Dus toets ons vir 4 as grondtal. $30_4 = 3 \times 4^1 + 0 \times 4^0 = 12_{10}$, maar drie onewe getalle kan nie 12 as som lewer nie. Dus probeer ons vir $* = 5$.

$$30_5 = 3 \times 5^1 + 0 \times 5^0 = 15_{10} = 1_{10} + 5_{10} + 9_{10} \text{ of } = 1_{10} + 3_{10} + 11_{10} .$$

Dus is die 30 eintlik 30_5 wat niks anders is as 15_{10} nie. Laat ons dit ook met die resep hier bo toets:

$$15 \div 5 = 3 \text{ res } 0$$
$$3 \div 5 = 0 \text{ res } 3, \ \therefore \ 15_{10} = 30_5$$

Weereens kom die 3 en die 0 van die reswaardes geneem van onder af boontoe.

Nou weet ons daar is twee moontlike oplossings, nl. 1, 5 en 9 of 1, 3 en 11.

Na my mening was dit ’n baie interessante probleem. Nou kan u ook sê “Ek weet hoe daardie een werk.”

Opsioneel kan ons natuurlik nog kyk na optelling asook vermenigvuldiging in hierdie ander getallestelsels. Bestudeer die volgende berekenings in die tabel met verskillende grondtalle. Voordat ons dit egter kan doen, moet ons eers presies weet wat ons onderbewussyn doen wanneer ons optelling of vermenigvuldiging pleeg. Bestudeer dus die volgende paar voorbeeld-uiteensettings goed. Dis eenvoudig, maar uiters belangrik vir die stappe wat volg. Ek het dit nie vooraf eksplisiet genoem nie, maar u het vermoedelik reeds besef dat die koëffisiënte altyd met grondtal 10 gegee word. Dit word as ’n gegewe beskou.

$$\begin{aligned}
47_{10} + 35_{10} &= 4\times10^1 + 7\times10^0 + 3\times10^1 + 5\times10^0 \\
&= (4+3)\times10^1 + (7+5)\times10^0 \\
&= 7\times10^1 + (10+2)\times10^0 \\
&= 7\times10^1 + \underline{10}\times10^0 + 2\times10^0 \quad \text{die koëffisiënt } 10 > (10-1), \text{ dus} \\
&= 7\times10^1 + 1\times10^1 + 2\times10^0 \\
&= 8\times10^1 + 2\times10^0 \\
&= 82_{10}
\end{aligned}$$

Van stap 4 tot stap 5 vind die oordra van die ene plaas sou u die twee getalle ondermekaar geskryf het.

$$\begin{aligned}
23_5 + 43_5 &= 2\times5^1 + 3\times5^0 + 4\times5^1 + 3\times5^0 \\
&= 2\times5^1 + 4\times5^1 + 3\times5^0 + 3\times5^0 \\
&= \underline{6}\times5^1 + \underline{6}\times5^0 \quad \text{koëffisiënte } > (5-1), \text{ dus} \\
&= (5+1)\times5^1 + (5+1)\times5^0 \\
&= 1\times5^2 + 1\times5^1 + 1\times5^1 + 1\times5^0 \\
&= 1\times5^2 + 2\times5^1 + 1\times5^0 \\
&= 121_5 \\
&\quad (13+23=36)_{10}
\end{aligned}$$

$$34_5 \times 23_5 = \left(3\times5^1+4\times5^0\right)\times\left(2\times5^1+3\times5^0\right)19\times13=247$$
$$=\left(3\times2\right)\times5^{1+1}+\left(3\times3\right)\times5^1\times5^0+\left(4\times2\right)\times5^{0+1}+\left(4\times3\right)\times5^{0+0}$$
$$=\underline{6}\times5^2+\underline{9}\times5^1+\underline{8}\times5^1+\underline{12}\times5^0 \quad \text{ontoelaatbare koëffisiënte}$$
$$=\left(5+1\right)\times5^2+\underline{17}\times5^1+\left(5+5+2\right)\times5^0$$
$$=1\times5^3+1\times5^2+\left(5+5+5+2\right)\times5^1+1\times5^{1+0}+1\times5^{1+0}+2\times5^0$$
$$=1\times5^3+1\times5^2+1\times5^2+1\times5^2+1\times5^2+2\times5^1+1\times5^{1+0}+1\times5^{1+0}+2\times5^0$$
$$=1\times5^3+4\times5^2+4\times5^1+2\times5^0$$
$$=1442_5$$
$$\left(19\times13=247\right)_{10}$$

Sodra die koëffisiënt gelyk is aan die grondtal, of dit oorskry, "dra die 1 oor". Dus: $1_2+1_2=10_2$; $1_2+11_2=101_2$; $11_2+11_2=110_2$ ens. Met ander woorde, wanneer jy in grondtal 2 werk, is 1 + 1 = 2, wat ontoelaatbaar is. Dus: "dra die een oor", om 10_2 te gee.

Pas nou dieselfde beginsels toe soos in die twee tabelle hier onder aangedui.

10-delig	2-delig (binêr)	5-delig
27	11011 $\left(1\times2^4+1\times2^3+1\times2^1+1\times2^0\right)$	102 $\left(1\times5^2+2\times5^0\right)$
<u>+14</u>	<u>+1110</u> $\left(1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1\right)$	<u>+24</u> $\left(2\times5^1+4\times5^0\right)$
41	101001 $\left(1\times2^5+1\times2^3+1\times2^0\right)$	131 $\left(1\times5^2+3\times5^1+1\times5^0\right)$

10-delig	2-delig (binêr)	5-delig
27	11011 $\left(1\times2^4+1\times2^3+1\times2^1+1\times2^0\right)$	102 $\left(1\times5^2+2\times5^0\right)$
×**<u>14</u>**	×<u>1110</u> $\left(1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1\right)$	×<u>24</u> $\left(2\times5^1+4\times5^0\right)$
108 **<u>27</u>** **378**	0 0 0 0 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 <u>1 1 0 1 1</u> 1 0 1 1 1 1 0 1 0	413 <u>204</u> 3003

Daar is natuurlik niks wat ons verhoed om enige ander grondtal te gebruik nie. Dieselfde beginsels sal natuurlik geld wanneer in enige ander grondtal gewerk word. Dit is in werklikheid niks anders as 'n oefening in modulêre wiskunde nie, 'n onderwerp wat die moeite werd is om by 'n latere geleentheid van nader te beskou.

Ek vertrou dat u waarde geput het uit die begrip van grondtalle en dat u dit wel iewers in die toekoms nuttig mag vind. Dit speel so 'n groot rol in ons lewens en dis goed om soms dit wat ons onbewustelik doen, te bedink. Die brein is werklik 'n verstommende rekenaar.