Inleiding tot die een sy van hiperreële getalle en Cantor se kontinuumhipotese

Pieta van Deventer

Wanneer is groot werklik groot? Bestaan daar iets soos oneindigheid? Wat beteken die simbool ∞ wat ons met oneindigheid assosieer? Wat is die waarde van $\infty + \infty$ of $\infty \times \infty$? Cantor (1845–1918)[1] en 'n hele aantal wiskundiges voor en na hom het hulle met die bostaande vrae besig gehou. In hierdie skrywe word onder andere mildelik gebruik gemaak van die inhoud van 'n dokument van Suber[2], asook 'n publikasie van Brian Clegg.[3]

Hierdie interessante vrae is gevaarliker as wat hulle op die oog af lyk. 'n Mens se intuïsie is die ding wat jou laat struikel. Wat op die oog af intuïtief logies lyk, is in werklikheid nie so eenvoudig nie, op dieselfde wyse as wat die fisici moes toegee dat die fisiese wette wat vir die makroruimte geld, nie net so vir die mikroruimte in die atoom geld nie. Cantor se afleidings het só teen sommige ander wiskundiges se grein van hulle intuïtiewe begrippe ingegaan, dat hulle hom wou verguis. Daar is selfs vandag nog wiskundiges wat nie sy afleidings en resultate wil aanvaar nie en iets in die plek daarvan probeer plaas. Dit waarna ons hier gaan kyk is slegs een gesig van wat bekend staan as die hiperreële getalle, nl. die monstergrotes. Die ander gesig is die minuskule kleintjies, die infinitesimale, die 1/0-tipe waardes waarna ons by 'n ander geleentheid sal kyk. Saamgevoeg word daar ook gepraat van surreële getalle, wat ook raak aan die begrip beskryf deur die sg. nie-standaard wiskunde. Moet egter nie dat dit u afsit nie. Dis maar net name.

Vrae het ontstaan ten opsigte van die aantal eenhede of elemente in veral groot versamelings[4]. Dit het geblyk dat wat ons bloot getalle noem eintlik kardinaalgetalle is, teenoor die sg telgetalle. 'n Kardinaalgetal koppel 'n vergelykende getal van die aantal elemente in een versameling met dié in 'n ander versameling. 'n Telgetal gee slegs weer met die hoeveelste entiteit ons besig is. Dit is dan ook dikwels eintlik 'n ordinaalgetal. As 'n versameling A vyftien elemente bevat en versameling B bevat vyftien elemente, is hulle kardinaalgetalle dieselfde en in daardie opsig is $\#(A) = \#(B)$ waar die simbool # staan vir "die kardinaalgetal" of "die aantal elemente in". Ons gaan egter Suber se notasie volg, nl $|A| = |B|$. Beide notasies kom in die literatuur voor. U moet net daarvan bewus wees dat daar nog ander notasies ook in gebruik is. Beskou nou $N_0 = \{0,1,2,3,\ldots\}$, die versameling van natuurlike getalle soos ons dit hier vir die doeleindes van hierdie artikel definieer, asook $N_{3n} = \{0,3,6,9,\ldots\}$, die versameling van drievoude van die elemente van die versameling van natuurlike getalle. Op die oog af sou 'n mens reken dat N_0 drie keer soveel (nie drie keer meer, soos sommige mense foutiewelik sê nie) elemente bevat as N_{3n}. Laat ons egter vir elke element in N_0 'n element in N_{3n} afmerk. Nou kom ons agter dat vir elke element in N_{3n} daar

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor
[2] https://www.mathpath.org/concepts/infinity.htm
[3] Clegg, B. 2003. Infinity: The quest to think the unthinkable. London: Running Press.
[4] Die versamelingsbegrip is moeilik definieerbaar. Probeer gerus om 'n versameling te verduidelik sonder om 'n woord wat ook self na 'n groep of versameling verwys te gebruik. Nie moontlik nie, nè? Ons kom by 'n latere geleentheid m.b.v. die versamelingsteorie van Zermelo-Fraenkel by hierdie probleem uit.

ook 'n element in N_0 is en omgekeerd. Hoe 'n mens ook al sou wou verander aan die saak, en hoe ver 'n mens ook al na regs sou wou beweeg op die getallelyn, is daar altyd 'n een-tot-een afmerkbaarheid (denumerability) of aftelbaarheid van die een versameling op die ander een. Die gevolgtrekking is dat hierdie twee versamelings ewe veel elemente bevat. Die begrip van aftelbaarheid is belangrik en sal weer gebruik word. Hierdie versamelings se elemente is dus aftelbaar. Ons sê die twee versamelings het dieselfde kardinaalgetal. Hierdie kardinaalgetal is klaarblyklik baie groot. Ons sê gewoonweg dat dit 'n oneindige aantal elemente is, wat as $\aleph_0$ (uitgespreek alef-nul of alef-zero) bekend staan. Let op dat ons nie die ∞-simbool gebruik nie. Die ∞ simbool is 'n generiese simbool wat verskillende oneindighede as kardinaalgetalle kan verteenwoordig, soos ons binnekort sal sien. Ons weet dus nie hoeveel elemente in N_0 of N_{3n} is nie. Ons weet net die aantal is dieselfde, of anders gesê, dat hulle kardinaalgetalle dieselfde is en dat dit 'n baie groot getal, oneindige groot getal is. Die benoeming van oneindigheid sal ons later weer aanroer, aangesien daar meningsverskil bestaan onder sekere wiskundiges oor die gebruik van die term.[5]

Sekere vrae kom onmiddellik na vore, soos:

1. Is daar dalk nog kardinaalgetalle kleiner as of groter as $\aleph_0$?
2. Indien daar nog sulke groot kardinaalgetalle bestaan, hoeveel van hulle is daar? Hierdie vraag lei ook tot Cantor se sg. kontinuumhipotese.
3. Geld die gewone algebraïese operators, $+, -, \times$ en $\div$ vir sulke groot kardinaalgetalle?
4. Hoe vergelyk die kardinaalgetal van die versameling van rasionale getalle met dié van N_1, of ?
5. Hoe vergelyk die kardinaalgetal van die versameling van heelgetalle (integers) positief en negatief met dié van N_1 ?
6. Hoe vergelyk die kardinaalgetal van die versameling van reële getalle met dié van N_1 ?
7. Hoe vergelyk die kardinaalgetal van die aantal punte op 'n lynsegment met dié van N_1 ?
8. Hoe vergelyk die kardinaalgetal van die aantal punte op 'n lynsegment van sê 5 cm met dié van 'n straallynsegment, dws van 'n lyn van onbepaalde lengte in een rigting, of beide rigtings?
9. Hoe vergelyk die aantal punte op 'n lynsegment met die aantal punte wat 'n vlak vorm met breedte en lengte elk gelyk aan dié van die lynsegment?
10. Dieselfde vraag soos in 9, maar nou in 3 of meer dimensies?
11. Is daar versamelings wat groter is as alle ander versamelings?
12. Is daar nie teenstellings te vinde in hierdie verskynsel van baie groot getalle nie?

In hierdie artikel probeer ons om enkele van die bostaande vrae te beantwoord. 'n Volgende artikel sal dan aan die orige onbeantwoorde vrae gewy word. Hou vas. Dis nie moeilik nie. Dis net 'n nuwe benadering van bewysvoering sonder ingewikkelde vergelykings wat

[5] 1/0 is in werklikheid ongedefinieer, maar die waarde van *a/b* soos *b* na 0 streef, is nie ∞ soos algemeen gesê word nie, maar staan dan wel bekend as hyperion of aperion, wat “baie groot” beteken. Verwys ook na voetnota 3 hier bo, pp 158, 159.

opgelos moet word. Wees maar net wakker. Dis ’n ietwat anderste wiskunde hierdie, maar ek kan jou belowe dat dit ’n mens soms twee keer laat dink.

Vergelyk nou die afmerkbaarheid van die elemente van $N_0 = \{0,1,2,3,\cdots\}$ met dié van $N_1 = \{1,2,3,\cdots\}$, nl. $0 \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 3, \ldots$. Dis duidelik dat hierdie twee versamelings ook een-tot-een afmerkbaar is, ongeag hoe ver jy gaan. Dus is die kardinaalgetal van die twee versamelings dieselfde. Dus, al is $N_1 \subset N_0$, d.w.s. N_1 is ’n egte deelversameling van N_0, het hulle dieselfde aantal elemente! Hierdie laaste eienskap, d.w.s. ’n egte deelversameling wat dieselfde kardinaalgetal het as dié van die bronversameling, definieer ’n versameling wat ’n oneindige aantal elemente bevat, nl. met die kardinaalgetal $\aleph_0$. Wat meer is, dit volg dus nou direk dat $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$. Hierdie argument kan nou verder uitgebrei word op so ’n wyse dat

$$\aleph_0 = \aleph_0 + 1 = \aleph_0 + 1 + 1 = \aleph_0 + 2 = \aleph_0 + 3 = \ldots = \aleph_0 + \aleph_0 \ .$$

Ons neem die argument soos volg verder:

$$\aleph_0 == \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + 1 = \aleph_0 + \aleph_0 + 2 = \aleph_0 + \aleph_0 + 3 = \ldots = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \ldots = \aleph_0 \times \aleph_0 \,.$$

Of $\aleph_0 - \aleph_0 = \aleph_0$ is lastiger. Wanneer sou dit wel waar wees? Dit is slegs geldig indien die kardinaalgetal van ’n aftelbare egte deelversameling van die kardinaalgetal van ’n nie-aftelbare bronversameling afgetrek word. Watter soort versameling se elemente is dan nie-aftelbaar? ’n Bietjie verder toon ons so ’n versameling aan.

Dit laat die brein duisel, maar nog is dit nie die einde nie. Laat ons enkele verdere eienskappe bestudeer.

Die eerste vrae t.o.v. die rasionale getalle, heelgetalle en reële getalle word nou bestudeer. Beskou Q, die versameling van rasionale getalle. Hoe sou die kardinaalgetal van Q met dié van N_0 of N_1, nl. $\aleph_0$ vergelyk? Ons skryf die eerste aantal terme van Q soos volg uit:

	1	2	3	4	5	…
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	…
2	1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	…
3	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	…
4	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	…
5	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	…
…	…	…	…	…	…	…

Die eerste ry dui al die moontlike positiewe heeltallige tellers aan en die eerste kolom dui al die moontlike positiewe heeltallige noemers aan. Beweeg soos volg: Begin by 1/1, regs na 2/1 en dan diagonaal na links onder na 1/2, een af na 1/3, diagonaal na regs bo, nl. 2/2, 3/1, een regs na 4/1, diagonaal na links af 3/2, 2/3, 1/4, een af na 1/5, diagonaal na regs bo, 2/4, 3/3, 4/2, ens. Op hierdie wyse kan die versameling van rasionale getalle nou eenduidig afgemerk word met die elemente van N_0. Die elemente van Q is dus aftelbaar. Dis egter nie al nie. Hier is heelwat dupliserings, bv. 1/1, 2/2, 3/3, so ook 1/3, 3/9 en 6/18. Ons vind dus dat die kardinaalgetal van die rasionale getalle plus duplikserings op die meeste soveel is as dié van N_0 of dan N_1. Aan die ander kant weet ons dat $N_1 \subset Q$, d.w.s. 'n egte deelversameling van Q is. Dus is die kardinaalgetal van die rasionale getalle minstens soveel as dié van N_1. Hieruit volg dat hierdie kardinaalgetalle dieselfde moet wees, nl. $\aleph_0$. Tot op hierdie stadium weet ons dus dat $|N_0| = |N_1| = |Q| = \aleph_0$.

Daar is nog twee bekende versamelings wat ons moet beskou, nl. *H*, die versameling van alle heelgetalle, positief sowel as negatief, en *Z*, die versameling van reële getalle.

Beskou $H = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}$. Die elemente is duidelik een-tot-een met die elemente van $N_0 = \{0,1,2,3,\ldots\}$ en ook aftelbaar. Dus is $|H| = |N_0| = \aleph_0$. Samevattend weet ons sover dat $|N_0| = |N_1| = |Q| = |H| = \aleph_0$.

Wat die reële getalle betref, het Cantor soos volg geredeneer: Beskou die versameling van álle rasionale sowel as irrasionale reële getalle tussen 0 en 1. Skryf hierdie getalle in een kolom. Die kolom lyk dan soos volg, met slegs twee sulke getalle as voorbeelde neergeskryf:

0
…
0.34534281965437543298777…
…
0.87695674394567345321688…
…
1

Die vraag is of die getalle, soos hier gelys, aftelbaar is. Cantor redeneer verder soos volg: Neem die eerste syfer van die eerste getal, die tweede syfer van die tweede getal, die derde van die derde getal, ens. Deur hierdie syfers te gebruik, skep hy nou 'n nuwe getal, maar dan verander hy elkeen van hierdie gekose syfers na 'n ander syfer. Hy sal byvoorbeeld 1 by elkeen van hierdie syfers bytel, en as dit 'n 9 is dit na 0 verander. Op hierdie manier kan die getal nie meer die eerste getal in die oorspronklike kolom wees nie, want die eerste syfer verskil. Die tweede getal kan nou nie dieselfde as die tweede getal in die oorspronklike kolom wees nie, want die tweede syfer verskil. So bou hy dan sy argument verder uit. Dit beteken ongeag die feit dat hy gereken het hy het alle getalle tussen 0 en 1 neergeskryf, daar nog altyd 'n nuwe getal tussen hierdie getalle geskep kan word, 'n getal wat van al die voriges verskil. U kan gerus hierdie prosedure kontroleer deur so 'n kolom van ongeveer 9 getalle te skep en dan die prosedure toe te pas. Dus kan jy op geen manier 'n een-tot-een ooreenkoms tussen die reële getalle en die natuurlike getalle verkry nie. Hiermee volg dit dus dat ons met 'n nie-aftelbare versameling te doen het, een met 'n kardinaalgetal groter as $\aleph_0$.

Ons het dus met 'n nuwe kardinaalgetal te doen. Kom ons noem voorlopig hierdie kardinaalgetal $\aleph^*$. Nou hoekom noem ons dit nie $\aleph_1$, nl. die direk opvolgende kardinaalgetal ná $\aleph_0$ nie? Dit is die groot vraag: Is daar nie dalk 'n versameling of versamelings met kardinaalgetalle tussen $\aleph_0$ en $\aleph^*$ nie? Hierdie vraag is wel nie bekend as 'n milleniumprobleem nie, maar dis eerste een op die lys van Hilbert se onopgeloste probleme en staan bekend as die kontinuumprobleem. Cantor het dit as die kontinuumhipotese gestel dat $\aleph^* = \aleph_1$, m.a.w. dat daar nie ’n kardinaalgetal tussen $\aleph_0$ en $\aleph^*$ bestaan nie, maar nie hy of enigiemand anders kon dit tot dusver korrek bewys nie, en so ook nie die teendeel nie.

Hierdie is net ’n proeseltjie van die oneindige getalle. Ons het die eerste vyf vrae hier bo beskou, deling uitgesluit. In die volgende artikel kyk ons na van die ander vrae soos hier bo aangedui, en dan skep ons ook ons eie oorkoepelende versameling, bekend as die magsversameling (power set). Ons sal ook die betekenis van $\aleph^*$ van nader beskou en verder daarop uitbrei. Daar word ook gekyk na die weersprekende resultate wat ’n mens kan kry a.g.v. ons intuïtiewe definisie van ’n versameling en waar moontlike oplossings daarvoor gevind sou kon word.