Getalle-uitbreiding en die *n*ste wortels van enige getal

Pieta van Deventer

Soms moet 'n mens agteroor sit en wonder oor waar alles begin het; meer spesifiek die ontstaan en die geskiedenis van getalle soos ons dit vandag ken, of nie ken nie. Dis 'n lang geskiedenis met baie krulle en draaie. Hier is net 'n absoluut minimalistiese oorsig oor die volgorde van gebeure.

Eers was daar net die natuurlike getalle wat nie die syfer nul ingesluit het nie, nl. $N=\{1,2,3,\ldots\}$. Nul is eers later in gebruik geneem; nie as 'n getal nie, maar in verskillende simboolvorms as plekhouer. Die Italiaanse wiskundige Fibonacci (1170–1250) word beskou as die eerste Westerling wat nul, d.w.s. 0, as 'n getal begin hanteer het.[1] So het die versameling van telgetalle, nl. $N_0=\{0,1,2,3,\ldots\}$, deur sommige ook die natuurlike getalle genoem, bekend geraak. Dus is daar so ietwat van 'n verwarring tussen die definisies van wat telgetalle en natuurlike getalle onderskeidelik dan nou regtig is. Dit beteken dat in enige dokument waar van hierdie terme gebruik gemaak word, 'n mens eers moet seker maak van hoe die skrywer dit sien.

Met verloop van tyd het die begrip van getalle in die algemeen uitgebrei van die positiewe heelgetalle na die negatiewe heelgetalle. Die begrip van breuke, waar die noemers sowel as die tellers heeltallig is, is bygevoeg. So het die begrip van rasionale getalle ontstaan. Ná erge meningsverskille onder wiskundiges, is aanvaar dat irrasionale getalle ook 'n werklikheid is en wel 'n bestaansreg het. Gottfried Leibniz, Leonhard Euler en later Joseph Liouville en andere het die transendentale getalleklas bestudeer. So het ons dus nou die hele reële getallesisteem. Die reële getalle is later onderverdeel in die mikroklein getalle, die sg. infinitesimal en die makrogroot getalle, wat ook as oneindige getalle bekend staan. Laasgenoemde twee klasse staan gesamentlik ook bekend as die hiperreële getalle. Gesamentlik kan ons, onakkuraat genoeg, praat van die surreële getalle wat al die reële getalle insluit. Die werklike indeling is in werklikheid 'n bietjie meer ingewikkeld as dit alleen. Dit was egter onvoldoende vir menige vrae wat nie beantwoord kon word sonder 'n verdere uitbreiding van die getallesisteem nie. 'n Behoefte aan 'n tweede dimensie in die getallestelsel het homself opgedwing in die vorm van die komplekse getalle; dis nou getalle wat 'n reële komponent sowel as 'n sg. imaginêre komponent bevat. Ingenieurs, veral elektriese ingenieurs en ander toegepaste wiskundiges, is daarop gewys dat hulle met iets werk wat nie bestaan nie, net soos voorheen gesê is dat 0 nie bestaan nie en negatiewe getalle nie kan bestaan nie en so ook die irrasionale getalle, maar die gebruikers van die komplekse getalle het getoon dat hulle tot realistiese antwoorde kom en mettertyd het die weerstand verdwyn. Nou is komplekse getalle deel van die wiskundige se arsenaal.

Hierdie artikel bestaan uit drie komponente: wat 'n komplekse getal is, hoe dit by die begrip van groepe inpas en 'n toepassing met voorbeelde.

Kortliks: Ons dui $\sqrt{-1}$ met die simbool i of j aan. Gevolglik is dit logies dat $i\times i=j\times j=-1$. Die versameling $\{-1,1,i,-i\}$ is 'n multiplikatiewe groep. Toets hierdie

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/0

bewering gerus aan die vereistes vir ’n multiplikatiewe groep, soos in ’n vorige artikel bespreek.[2]

Beskou nou die plat vlak met die x-as vir die reële getalle in die horisontale rigting en die $i-$as vir die imaginêre getalle in die vertikale rigting. ’n Komplekse getal is dus ’n tweetal bestaande uit ’n reële komponent tesame met ’n imaginêre komponent, nl. $x+yi$ met $x,y\in R$, dikwels in konteks kortweg aangedui deur (x,y). In hoe ’n mate voldoen die komplekse getalle aan die vereistes van ’n groep onder die twee operatore, additiwiteit en multiplikatiwiteit? Om dit te ondersoek is dit nuttig om gebruik te maak van ’n begrip bekend as die toegevoegde van ’n komplekse getal. Veronderstel ons het die komplekse getal $z=x+iy.$ Dan is die toegevoegde daarvan $\overline{z}=\overline{x+iy}=x-iy$. So ook is die toegevoegde van $x-iy$ dan $x+iy$. Die toegevoegde kom baie handig te pas by bewerkings met komplekse getalle.

Die toets vir groepeienskappe is: geslotenheid, die bestaan van ’n unieke inverse, die bestaan van ’n eenheidselement, asook assosiatiwiteit.

Gebruik die vermenigvuldigeroperator $\circ\equiv\times$. Dui die versameling van komplekse getalle aan met die simbool $\mathbb{C}$.

Beskou enige twee komplekse getalle $x_1+i\,y_1$ en $x_2+i\,y_2$. Dan is

$$\begin{aligned}(x_1+iy_1)\times(x_2+iy_2) &= x_1\times x_2+i^2\times y_1\times y_2+i\times x_1\times y_2+i\times y_1\times x_2\\ &= x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+y_1x_2).\end{aligned}$$

Dis duidelik dat die eerste twee terme reël is en so ook die koëffisiënt van i. Dus is die resultaat wel ’n komplekse getal en dus is die versameling van komplekse getalle geslote onder vermenigvuldiging.

Beskou die komplekse getal $1+i\cdot 0=1$. Dis duidelik dat vir enige komplekse getal, $z=x+iy,$ die produk $1\times z=z\times 1=z$ bestaan, wat beteken dat daar ’n eenheidselement is, nl. 1 wat wel ’n element van ons versameling $\mathbb{C}$ is.

Beskou nou enige drie komplekse getalle $z_j=x_j+iy_j,\ j=1,2,3$. As ons nou onthou dat die produk van twee komplekse getalle weer ’n komplekse getal is, dan volg dit direk dat $z_1\times(z_2\times z_3)=(z_1\times z_2)\times z_3$ ook ’n komplekse getal is. Om te bewys dat die gelykaanteken geld, laat ek as ’n klein oefening in manipulasie aan u oor.

’n Vermenigvuldigingsinverse is van so ’n aard dat, gegewe $z=x+iy$, daar ’n element b moet wees sodanig dat $z\times b=1,$ d.w.s. $b=z^{-1}=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+iy}.$ Gebruik die toegevoegde van z, nl. $\overline{z}=x-iy$ en vermenigvuldig b met 1 op die volgende wyse:

[2] https://www.litnet.co.za/wp-content/uploads/2019/11/edit-15-op-22-Okt-Wiskundige-struktuur.pdf

$$z \times b = 1,\ \text{d.w.s. } b = z^{-1} = \frac{1}{z} \times \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{1}{x+iy} \times \frac{x-iy}{x-iy}$$
$$= \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Dis duidelik dat die eerste term reël is, en so ook die koëffisiënt van i. Kontroleer gerus self dat $z \times b = z \times z^{-1} = 1$. Die resultaat is dus wel ’n komplekse getal en dus besit die versameling $\mathbb{C}$ ’n vermenigvuldigingsinverse vir elkeen van sy komponente, behalwe vir $z = 0 + i0$. Hoekom het $z = 0 + i0$ dan nie ’n vermenigvuldigingsinverse nie?

Dus weet ons nou dat die komplekse getalle nie aan al die vereistes van ’n multiplikatiewe groep voldoen nie.

Is $\mathbb{C}$ nou ’n groep onder die additiwiteits- of optellingsoperator, $\circ \equiv +$?

Beskou enige twee komplekse getalle $z_1 = x_1 + iy_1$ en $z_2 = x_2 + iy_2$. Dan is

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2).$$

Dis duidelik dat die $x_1 + x_2$ reël is, en so ook die koëffisiënt van i. Dus is die resultaat wel ’n komplekse getal en gevolglik is die versameling van komplekse getalle geslote onder optelling.

Dis ook ooglopend dat $z_1 + 0 = z_1$. Dus weet ons dat $\mathbb{C}$ ’n identiteitselement, nl. 0, bevat.

Verder is dit ook duidelik dat elke komplekse getal, $z = x + iy$, sy eie unieke optellingsinverse het in die vorm van $-z = -x - iy$, want $x + iy + (-x - iy) = 0 + i \cdot 0 = 0$, nl. die identiteitselement.

Uit die aanduiding van die geslotenheid is dit ook duidelik dat $\mathbb{C}$ geslote is onder die proses van assosiatiwiteit, d.w.s. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$, wat ook ’n element van $\mathbb{C}$ is.

Wat meer is, $\mathbb{C}$ is Abels onder beide operatore, d.w.s. $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$ en $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ vir enige twee komplekse getalle.

Ons het dus hier ’n ring onder die Britse definisie.[3]

Wat is die nut van komplekse getalle? Daar is ’n legio van toepassings. Koos Holtzhausen het o.a. die volgende kommentaar op ’n vorige artikel gelewer:[4] “Wat die getalle en Euler se identiteit fassinerend maak, is dat dit elke dag deur elektriese ingenieurs en wetenskaplikes gebruik word om berekeninge i.v.m. wisselstroom (sinusgolwe) te maak (sonder dat hulle dit dalk besef). Die spanning of stroom word deur 'n komplekse getal $A = a + ib = Ae^{i(\text{hoek in radiale})}$ voorgestel.”

[3] https://www.litnet.co.za/verstaan-die-struktuur-van-wiskunde/
[4] https://www.litnet.co.za/algebraiese-en-transendentale-getalle/

Hierby kan ’n mens voeg die studie van golwe in die algemeen, liggolwe, branders in die see en klankgolwe. Enige plek waar ’n mens ook al aan ’n golf mag dink, daar duik komplekse getalle op.

Ons dui hier slegs een onontbeerlike toepassing van komplekse getalle aan, nl. die berekening van magte en spesifiek wortels, synde dit ’n vierkantswortel, derde wortel of *n*ste wortel van ’n komplekse getal, aan. Komplekse getalle maak dit eenvoudig. Al wat ons nog benodig, is die basis tot Euler se identiteit, asook ’n identiteit wat aan De Moivre toegeskryf word, nl.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

Ons bewys De Moivre se stelling in kort. Die uitdrukking geld duidelik vir $n=0$ en so ook vir $n=1$. Veronderstel dis waar vir $n=k$. Dus $(\cos\theta+\sin\theta)^k = \cos k\theta + \sin k\theta$. Gebruik nou die volgende twee standaard trigonometriese identiteite, nl.

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \text{ en}$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

Dan kan ons skryf

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^1 \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)^k \\ &= (\cos\theta + i\sin\theta)\cdot(\cos k\theta + i\sin k\theta) \\ &= \cos\theta\cdot\cos k\theta + i\cos\theta\cdot\sin k\theta + i\sin\theta\cos k\theta - \sin\theta\cdot\sin k\theta \\ &= \cos\theta\cdot\cos k\theta - \sin\theta\cdot\sin k\theta + i(\cos\theta\cdot\sin k\theta + \sin\theta\cos k\theta) \\ &= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta.\end{aligned}$$

Volgens die beginsel van induksie volg dit dat hierdie uitdrukking nou vir alle n geld en daarmee het ons die stelling bewys.

Voeg nou Euler en De Moivre saam, en dui die hoek θ tussen die *x*-as en die (x,y)-vektor wat van die oorsprong af loop in u assestelsel in grade of radiale aan. Hierdie berekening staan ook bekend as $\theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ of $\arctan\dfrac{y}{x}$ of bgtan$\dfrac{y}{x}$, waar die laaste vorm die verafrikaanste weergawe is wat ongelukkig nooit werklik inslag gevind het nie. Let nou op dat die punte $(0,0),(x,y)$ en $(x,0)$ ’n driehoek vorm. Dan vind ons dat

$$\begin{aligned}z = x + iy = re^{i\theta} = \sqrt{x^2+y^2}\,e^{i\theta} &= \sqrt{x^2+y^2}\,(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \sqrt{x^2+y^2}\,(\cos(\theta + k\cdot 2\pi) + i\sin(\theta + k\cdot 2\pi)), k = 0,1,2,3,\ldots\end{aligned}$$

Ons noem r die amplitude van die komplekse getal.

Baie belangrik: Wees versigtig om nie radiale en grade te meng nie. Hou slegs by een formaat.

Indien ons met positiewe reële getalle alleenlik werk, vereenvoudig dit na

$$z = x + i0 = \sqrt{x^2}e^i = x\left(\cos\left(0 + k\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(0 + k\cdot 2\pi\right)\right),\ \text{of meer akkuraat}$$
$$= x\left(\cos\left(k\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(k\cdot 2\pi\right)\right)\ \text{vir}\ k = 0,1,2,\ldots$$

Enkele voorbeelde word verskaf:

- Ons wil al die sesde wortels van 5 bereken. Dan is $z = 5 + 0\cdot i$.
  $\arctan\left(\frac{0}{5}\right) = 0$ radiale of 0°, dus $z = \sqrt{5^2 + 0^2}\left(\cos\left(0 + k\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(0 + k\cdot 2\pi\right)\right)$. In die algemeen is die wortels nou

$$z^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{0}{6} + \frac{1}{6}\cdot k\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{0}{6} + \frac{1}{6}\cdot k\cdot 2\pi\right)\right)\ \text{vir}\ k = 0,1,2,3,\ldots\ .$$

$$\text{Dus}\ z^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{1}{6}\cdot 0\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\cdot 0\cdot 2\pi\right)\right) \doteq 1.308\cdot\left(1 + i\cdot 0\right) = 1.308$$
$$\text{of}\ = 5^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\pi\right)\right) \doteq 1.308\cdot\left(0.5 + i\cdot 0.866\right) = 0.654 + i\cdot 1.133$$
$$\text{of}\ = 5^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 2\pi\right)\right) \doteq 1.308\cdot\left(\text{-}0.5 + i\cdot 0.866\right) = -0.654 + i\cdot 1.133$$
$$\text{of}\ = 5^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 2\pi\right)\right) \doteq 1.308\cdot\left(\text{-}1 + i\cdot 0\right) = -1.308$$
$$\text{of}\ = 5^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{1}{6}\cdot 4\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\cdot 4\cdot 2\pi\right)\right) \doteq 1.308\cdot\left(\text{-}.500\text{-}i\cdot 0.866\right) = -0.654 - i\cdot 1.133$$
$$\text{of}\ = 5^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{1}{6}\cdot 5\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\cdot 5\cdot 2\pi\right)\right) \doteq 1.308\cdot\left(0.500\text{-}i\cdot 0.866\right) = 0.654 + i\cdot 1.133$$
$$\text{of}\ = 5^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 2\pi\right)\right) \doteq 1.308\cdot\left(1 + i\cdot 0.000\right) = 1.308$$
$$\text{of}\ = 5^{\frac{1}{6}}\left(\cos\left(\frac{1}{6}\cdot 7\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{6}\cdot 7\cdot 2\pi\right)\right) \doteq 1.308\cdot\left(0.500 + i\cdot 0.866\right) = 0.654 + i\cdot 1.133$$

Let nou op dat die siklus herhaal word.

- Beskou die oplossing van $x^2 = 1$. Wat is die tweede wortels van $1 = 1 + i\cdot 0$? Die betrokke hoek is weer $\theta = 0$ grade of radiale, sodat

$$\therefore 1^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 2\pi\right)\right) = 1\left(1 + i\cdot 0\right) = 1$$
$$\text{of}\ = 1^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\pi\right)\right) = 1\left(-1 + i\cdot 0\right) = -1$$
$$\text{of}\ = 1^{\frac{1}{2}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\pi\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\pi\right)\right) = 1\left(1 + i\cdot 0\right) = 1$$

En so herhaal die siklus homself weer. Dus is $\sqrt{1}=\pm 1$, soos ons weet.

- Wat van 'n getal soos $z=3-5i$ se derde wortels? Wel,

  $\arctan\left(\frac{-5}{3}\right)=-1.0304423904\,\text{rad}/-59.04^\circ/300.96^\circ$. Let op dat die tweetal $(3,-5)$ dui op 'n punt in die vierde kwadrant. Dus skryf ons $z=3-5i$ nou as

  $$\begin{aligned} z &\doteq \sqrt{(-5)^2+3^2}\left(\cos(-1.03+k\cdot 2\pi)+i\sin(-1.03+k\cdot 2\pi)\right),\ k=0,1,2,\ldots \\ &\doteq 5.831\left(\cos(-1.03+k\cdot 2\pi)+i\sin(-1.03+k\cdot 2\pi)\right),\ k=0,1,2,\ldots \end{aligned}$$

  Enige opsie van grade of radiale is egter geldig en sal na die korrekte wortels lei, maar sien die latere voetnota. Nou volg dat

$$\begin{aligned} \therefore z^{\frac{1}{3}} &= 5.831^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\frac{1}{3}\cdot(-1.03)\right)+i\sin\left(\frac{1}{3}\cdot(-1.03)\right)\right) \\ &\doteq 1.8\cdot(0.9416\text{-}i\cdot 0.3368)=1.6930-i0.6055 \\ \text{of } &= 5.831^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\frac{1}{3}\cdot(-1.03)+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{1}{3}\cdot(-1.03)+\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &\doteq 1.8\cdot(\text{-}0.1792+i\cdot 0.9838)=-0.3221+i\cdot 1.7690 \\ \text{of } &= 5.831^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\frac{1}{3}\cdot(-1.03)+2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{1}{3}\cdot(-1.03)+2\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &\doteq 1.8\cdot(\text{-}0.7624\text{-}i\cdot 0.6471)=-1.3709-i\cdot 1.1634. \end{aligned}$$

En so herhaal die siklus homself weer indien u die prosedure sou voortsit.[5]

Hiermee het u kennis gemaak met 'n waardevolle getallestelsel in twee dimensies, tesame met een baie spesifieke toepassing daarvan. Wat is die moontlikheid van 'n verdere dimensie van hierdie aard? 'n Sekere heer Hamilton het al in 1843 hierdie vraag gevra en met 'n oplossing vorendag gekom. Dis 'n bietjie meer ingewikkeld as die tweedimensionele komplekse getalle, maar eintlik meer omdat 'n mens versigtig moet wees met die besonderhede van die manipulasies en nie die beginsel self nie. Dit hou dan ook sterk verband met sekere gevorderde ontwikkelings in fisika. Hamilton het beroemdheid verwerf met hierdie verdere ontwikkeling waarna ons tegelegenertyd sal loer.

[5] Indien u die berekeninge in Excel wil nadoen, moet u eers die Analysis ToolPak Add-in vanaf Options in Excel installeer. Gebruik die =COMPLEX(x,y) funksie om 'n komplekse getal uit x en y te skep. Gebruik =IMPRODUCT(z1,z2,z3) om u antwoorde te kontroleer, byvoorbeeld dat 'n derde wortel tot die derde mag wel die oorspronklike gee. Let op dat Excel se trigonometriese funksies slegs radiale herken.