Algebraïese en transendentale getalle

Pieta van Deventer

Hierdie artikel gaan in werklikheid oor vier transendentale getalle, nl. $\sin x, \cos x, \pi, e$, asook rad en i, waar rad staan vir radiale en $i = \sqrt{-1}$ en hoe hierdie gedagtes almal saam in een verstommend eenvoudige vergelyking saamgevoeg word. Dis ook weereens ’n voorbeeld van die ongelooflike elegansie van wiskunde wat ’n mens so kan bekoor deur die eensklapse bymekaarkom van oënskynlik totaal losstaande idees.

Let op na die oplossings van die volgende vergelykings:

$$2x+3=5; \therefore 2x+3-3=5-3; \therefore \frac{2x}{2}=\frac{5-3}{2}; \therefore x=\frac{2}{2}=1$$

$$2x^2+2x-4=0; \therefore \frac{2x^2+2x-4}{2}=0; \therefore (x+2)(x-1); \therefore x=1 \text{ of } -2$$

$$x^2-1=0; (x-1)(x+1)=0; \therefore x=1 \text{ of -1}$$

$$\mathrm{x}^3=27; \therefore x=27^{\frac{1}{3}}=3$$

$$x^2+x-1=0; \therefore x=-0.5 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Hierdie resultate is almal verkry deur gebruik te maak van die algebraïese operators $+, -, \times, \div$ of $\sqrt[n]{(\bullet)^y} = (\bullet)^{\frac{y}{n}}$. ’n Algebraïese polinomiese vergelyking is ’n vergelyking van die volgende vorm: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n = 0$, waar $a_i \in Z$ vir alle i en nie alle $a_i = 0$ nie. Indien sommige $a_i \neq 0$, kan daaruit dan die wortels van die vergelyking gevind word m.b.v. die standaard operators soos pas aangetoon. Die wortels is net ’n ander manier om te verwys na die waardes wat die vergelyking waar maak. Die bostaande vergelykings met oplossings is dus almal algebraïes van aard. Die wortels oftewel oplossings van ’n algebraïese of dan polinomiese vergelyking val in die groepering van sg. algebraïese getalle wat onder andere insluit sommige reële getalle, die natuurlike getalle, die heelgetalle, die rasionale sowel as sommige van die irrasionale getalle, en sommige komplekse getalle.

Hoekom slegs sommige?

Indien daar nie ’n vergelyking soos bo aangetoon bestaan om ’n sekere waarde te vind nie, sê ons hierdie waarde is transendentaal. Dit wil sê, indien die vereiste waarde nie uit so ’n vergelyking gevind kan word met behulp van die algebraïese operators nie, noem ons daardie getal ’n transendentale getal. Transendentaal staan dus in hierdie sin teenoor algebraïes. Dit is dikwels geen maklike taak om te bewys dat sekere waardes inherent transendentaal is nie. Ons gaan vier van hierdie getalle bestudeer; drie waarmee u al van vroeg af bekend is en die ander nie noodwendig só bekend nie, maar indien jy enige renteberekeninge doen, maak jy onderliggend van hierdie getal gebruik, al is jy nie noodwendig daarvan bewus nie.

Die eerste transendentale getal is π.

Die algemeen gebruikte waarde van π, synde $22/7$, is slegs 'n benadering vir die werklike waarde. Die vraag is natuurlik waar π dan vandaan kom. π is die verhouding van die omtrek van enige sirkel tot sy deursnit. Ons is wel bekend met die formule vir die berekening van die omtrek van 'n sirkel, nl. $\text{omtrek} = 2\pi r = \text{deursnee} \times \pi$. Daar is geen manier waarop π die oplossing van 'n algebraïese vergelyking van enige aard is nie. Dit is reeds met behulp van die Lindemann–Weierstrass-stelling bewys dat π wel transendentaal is.[1]

Daar bestaan verskeie metodes om π se waarde te benader. Een daarvan is om 'n veelhoek buite om 'n sirkel te pas en so ook binne-in die sirkel. Hoe meer hoeke die binne- en buitesirkels bevat waarmee die sirkel self al hoe beter benader word, en die omtrekke van elk van die binne- en buiteveelhoeke bereken word, hoe meer word die omtrek van die sirkel self vasgepen binne twee grense en op hierdie wyse kan die omtrek benader word. Deel hierdie benaderde omtrek deur die deursnee van die sirkel en jy het 'n benaderde waarde vir π.

Daar is egter verskeie uitdrukkings waarmee die waarde van π met groter akkuraatheid bereken kan word, en selfs baie na aan eksak indien u tot aan die einde van dae nog terme by die uitdrukkings wou byvoeg. Maar eksak? Nie sommer nie. Hier is slegs drie van die maniere om dit te doen.[2] U kan dit gerus met m.b.v. 'n eenvoudige rekenaarprogram toets. Excel sal ook werk.

John Wallis se benadering is in 1665 gepubliseer.[3] Los π op uit die volgende:

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}\times\ldots.$$

Om te kontroleer: Let op dat ná die eerste faktor regs, die tellers weerskante van die noemers is vir faktore 2 en 3, 4 en 5, 6 en 7, ens. Dit wil sê 2 en 4 is weerskante van 3; 4 en 6 is weerskante van 5, ens.

'n Ander bekende uitdrukking is die Gregory-Leibniz-reeks

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\ldots\right).$$

Hierdie reeks konvergeer egter steeds baie stadig. 'n Ander, vinniger konvergerende reeks is die Nilakantha-reeks,

$$\pi = 3+\frac{4}{2\times3\times4}-\frac{4}{4\times5\times6}+\frac{4}{6\times7\times8}-\frac{4}{8\times9\times10}+\frac{4}{10\times11\times12}\cdots.$$

Dis verbasend watter nut π in die algemeen het, benewens die berekening van die sirkel se omtrek en die sirkel se oppervlakte.

Een nut van π is hoe die gebruik daarvan baie berekeninge geweldig vereenvoudig. In plaas daarvan om met grade, minute en sekondes te werk, dui ons 'n baie meer basiese en kragtige

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Lindemann%E2%80%93Weierstrass_theorem
[2] https://www.mathscareers.org.uk/article/calculating-pi/
[3] Clegg, B. 2003. *Infinity-The Quest to think the Unthinkable.* Londen: Running Press. P. 70.

metode t.o.v. hoeke aan, nl. dié van radiale. Beskou die sirkel met straal r met ’n hoek om die middelpunt van 360°. Die omtrek van die sirkel gedeel deur die straal is $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ radiale, hoeveel grade 1 radiaal dan nou ook sou wees. Veronderstel nou ek gebruik net 90° om die sirkel se middelpunt. Dan is die betrokke ooreenkomstige lengte van dié deel van die sirkelomtrek, d.w.s. die booglengte $\frac{2\pi r}{4}$ en die kwosiënt met betrekking tot die straal, $\frac{2\pi r}{4}\Big/ r = \frac{\pi}{4}$ radiale. Die verhouding $\frac{\text{lengte van die sirkelboog}}{\text{straal}} = \frac{s}{r}$ gee dus vir ons die hoek onder sirkelboog i.t.v. veelvoude van π. Anders gestel: Die hoek $\theta = \frac{s}{r} = \frac{\text{booglengte}}{r}$ is in radiale. Die patroon wat ontwikkel is duidelik, nl.

$$360^\circ \propto 2\pi \,\text{radiale},\ 180^\circ \propto \pi \,\text{radiale},\ 90^\circ \propto \frac{\pi}{4}\text{radiale},\ 60^\circ \propto \frac{\pi}{6}\text{radiale, ens.}$$

Een radiaal is dus $\frac{360}{2\pi} \doteq 57.295^\circ$ of $1^\circ = \frac{\pi}{180} \doteq 0.01745$ radiale, nie dat jy lg. twee omsettings ooit gaan nodig kry of gebruik nie. In die praktyk voeg ons nie eens die eenheid, rad, by indien die π-eenheid gebruik word nie en sê ons eenvoudig: die hoek is $\frac{\pi}{2}$ of ’n hoek van 1.570796 rad, of wat ook die geval mag wees. Die π in die uitdrukking sê alreeds ons werk met radiale.

Die tweede transendentale getal is e, ook bekend as Napier se e of Euler se konstante,[4] Laasgenoemde benaming moet egter nie verwar word met γ, die sg. Euler–Mascheroni-konstante nie. Hierdie konstante, nl. e, het ’n lang geskiedenis en verskeie beroemde wiskundiges was betrokke by die ontstaan en ontwikkeling daarvan, o.a. Napier, Leibniz, Huygens, Jacob Bernoulli[5] en Goldbach. Die ontstaan van e is oorspronklik skynbaar gekoppel aan die berekening van rente.[6]

Beskou die volgende renteberekening: 100% per jaar vir een jaar op R1.00 lewer R1.00 rente met ’n finale bedrag van R2.00. D.w.s

$$1\cdot\left(1+\frac{100}{100}\right)^1 = \text{R}2.00.$$

Veronderstel die rente word nou halfjaarliks saamgesteld bygevoeg. Dan kry ons

$$1\cdot\left(1+\frac{100/2}{100}\right)^2 = 1\cdot\left(1+\frac{100}{2\cdot 100}\right)^2 = \text{R}2.25.$$

[4] Napier, word beskou as die uitvinder van logaritmes. Wiskunde was vir hom slegs ’n tydverdryf. Logaritmes met grondtal e staan dan ook bekend as die Napierse logaritmes. Verwys gerus na https://www.thocp.net/reference/sciences/mathematics/logarithm_hist.htm vir Napier se motivering hiervoor.
[5] Die geskiedenis van die briljante Bernoulli-familie is baie interessante leesstof en u kan dit gerus op die internet nalees. Interne familie-jaloesie op prestasie was deel van hulle leefwyse; slim, maar uiters moeilike mense.
[6] https://en.wikipedia.org/wiki/E_(mathematical_constant)

Indien ons nou die rente daagliks verreken, groei die bedrag tot

$$1\cdot\left(1+\frac{100/365}{100}\right)^{365}=1\cdot\left(1+\frac{100}{365\cdot 100}\right)^{365}=\text{R}2.714567.$$

Verreken nou die rente elke sekonde. Dan volg dat

$$1\cdot\left(1+\frac{100/(365\times 24\times 60\times 60)}{100}\right)^{365\times 24\times 60\times 60}=\left(1+\frac{100}{365\times 24\times 60\times 60\times 100}\right)^{365\times 24\times 60\times 60\times 100}=\text{R}2.718281\ldots$$

Hierdie proses kan nou voortgesit word tot ’n kontinue byvoeging van rente, met verdere verfyning van die aantal syfers na die desimale punt.

J. Bernoulli was skynbaar die eerste persoon wat hierdie aangeleentheid met erns bestudeer het. Hy was dan ook die eerste persoon wat ’n uitdrukking daarvoor ontwikkel het, nl.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\doteq 2.71828\doteq e\ ,$$

waarvoor ons nie nou op die bewys sal ingaan nie. Euler het die laaste sê gehad in die benaming van hierdie getal, nl. e.

Hierdie konstante het die besondere nuttige eienskap dat indien ’n mens die helling van die raaklyn aan die kurwe van e^x in die punt x sou wou hê, al wat benodig word die funksie self is. D.w.s.

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x,\frac{d^2}{dx^2}\left(e^x\right)=e^x,\text{ ens.}$$

Verder, vir enige funksie in x as eksponent, sê $f(x)$, is

$$\frac{d}{dx}\left(e^{f(x)}\right)=e^x\frac{d}{dx}\left(f(x)\right).$$

Op skool is die algemene gebruik om met logaritmes met grondtal 10 te werk. In verdere wiskunde verdwyn dit heeltemal uit die prentjie. Logaritmes met grondtal 10 word geheel en al oorgeneem deur die gebruik om met grondtal e te werk, en dan praat ons nie van log nie, maar van ln (uitgespreek: lin). Dus is

$$\log_e 2.71828.....\doteq \ln 2.71828\doteq 1.$$

Die simbool $\doteq$ word gebruik omdat 2.71828 nie die absoluut korrekte waarde vir e is nie.

So ook is die area tussen die kurwe van e^x en die x-as links van x ook gelyk aan e^x. Anders gestel:

$$\int_{-\infty}^{x} e^y dy=e^x\ .$$

Die laaste twee transendentale getalle wat ons bestudeer is $\sin x$ en $\cos x$. Weereens kan x nie m.b.v. 'n algebraïese vergelyking gevind word nie. Die oplossing kan met behulp van die sg. Taylorreeks bepaal word wat soos volg daar uitsien:

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots \text{resterm},$$

wat onder sekere voorwaardes geld, of die ooreenkomstige Maclaurin-reeks vir wanneer die reeks om $a = 0$ gesentreer is ,

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots \text{resterm}.$$

Indien aan al die voorwaardes voldoen word, is die resterm selde 'n probleem.[7] Hou nou in gedagte dat

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \text{ en } \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x, i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \text{ ens.}$$
$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots, \text{ en } 0! = 1.$$

Dit volg dan direk dat

$$\text{Gegewe } f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots \text{resterm}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow e^{ix} &= e^{i0} + \frac{x}{1!} \cdot ie^{i\cdot 0} + \frac{(x)^2}{2!} \cdot i^2 e^{i\cdot 0} + \frac{(x)^3}{3!} \cdot i^3 e^{i\cdot 0} + \frac{(x)^4}{4!} \cdot i^4 e^{i\cdot 0} + \frac{(x)^5}{5!} \cdot i^5 e^{i\cdot 0} + \frac{(x)^6}{6!} \cdot i^6 e^{i\cdot 0} + \frac{(x)^7}{7!} \cdot i^7 e^{i\cdot 0} \ldots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \ldots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) \qquad (1) \\
\sin x &= \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!} \cdot x + \frac{-\sin 0}{2!} \cdot x^2 + \frac{-\cos 0}{3!} \cdot x^3 + \frac{\sin 0}{4!} \cdot x^4 + \frac{\cos 0}{5!} \cdot x^5 + \frac{-\sin 0}{6!} \cdot x^6 + \frac{-\cos 0}{7!} \cdot x^7 \ldots \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\ldots \qquad (2) \\
\cos x &= \cos 0 \cdot 1 + \frac{-\sin 0}{1!} \cdot x + \frac{-\cos 0}{2!} \cdot x^2 + \frac{\sin 0}{3!} \cdot x^3 + \frac{\cos 0}{4!} \cdot x^4 + \ldots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \ldots \qquad (3)
\end{aligned}$$

Dan volg dit verder uit hierdie drie vergelykings dat

$$\Rightarrow e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \ldots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \ldots\right).$$
$$\therefore \; e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

[7] Die Taylor-reeks se afleiding en die hantering van die resterm, tesame met 'n uiters belangrike toepassing daarvan in die ontwikkeling van veral wiskundige statistiek se deltametode, sal in 'n latere artikel aandag kry.

Hierdie resultaat word dikwels geskryf as $cisx$, en word uitgespreek as *sis x*. Dit gee die volgende belangrike resultaat:

$$\Rightarrow e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi \qquad \text{of} \qquad e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi)$$

$$\therefore e^{i\pi} = -1 + i\cdot 0 \qquad\qquad \therefore e^{-i\pi} = -1 + i\cdot 0$$

$$\therefore e^{i\pi} = -1, \text{ oftewel } e^{i\pi} + 1 = 0. \qquad \therefore e^{-i\pi} = -1, \text{ oftewel } e^{-i\pi} + 1 = 0.$$

Met die linkerkantse uitdrukking het ons dus nou Euler se identiteit of vergelyking bewys. In hierdie gesamentlike uitdrukking het ons die komplekse getalle, transendentale getalle, sowel as die reële getalle opgesom en in een slag ook die verband met trigonometrie vasgemaak. Met hierdie identiteit is ons ook onmiddellik in staat om die *n*-te wortel van enige reële of komplekse getal sonder moeite te vind. Dit hang saam met die vreemde resultaat dat $e^{i\pi} = e^{-i\pi}$. Dink hier aan (sikliese) groepe. Sonder hierdie eienskap van *n*-te worteltrekking sou wiskunde leeg wees en ons sal by ’n ander geleentheid hieraan aandag gee.

Wat meer kan ’n mens vra? Die volgende: Hoe op aarde kan ’n transendentale getal verhef tot ’n transendentale getal dan ’n reële getal wees? En wat is die rol van i in hierdie vergelyking? Dis verhale vir ’n ander dag. Soos al voorheen opgemerk, is dit wat wiskunde so aantreklik maak. Die vrae word nie minder nie, net meer en al hoe interessanter.