Struktuur in Wiskunde

Pieta van Deventer

Ek het op skool Duits as vak geneem. Die vak is aangebied deur middel van ’n studie van die die struktuur van die taal. Dit het my getref dat Afrikaans en Engels ook elkeen ’n soortgelyke struktuur het. En dit het my baie gehelp in my begrip van nie net Engels nie, maar ook my eie taal, Afrikaans oor hoe dinge inmekaarsteek.

Op dieselfde manier is daar ook struktuur in die taal, wiskunde, met sy eie woordeskat. Van hierdie woorde is aan die meeste mense bekend, byvoorbeeld plus, minus, vermenigvuldig, resiprook, inverse – nou-nou iets meer oor hierdie laaste twee, dan ook vierkantswortel, kwadraat, dotproduk en nog baie meer.’n Selfstandige naamwoord in ’n taal is slegs ’n etiket of simbool, byvoorbeeld die woord of etiket, lepel roep ’n voorwerp op wat ons almal ken. Die voorwerp kon enige ander naam of etiket gehad het. Dikwels is so ’n naam beskrywend van aard, bv. langbroek. Dis weliswaar ’n etiket, broek, maar met die beskrywing, lang daarmee saam. So roep die simbool 4 die begrip van ’n sekere aantal, genoem vier by ons op. Die simbool 4 is nie vier nie, slegs die etiket vir daardie virtuele begrip van ’n sekere aantal. As ’n mens dit besef, skep dit ’n baie beter begrip van wat ’n mens met syfers en ander wiskundige simbole doen.[1] ’n Punt, as een van die komponente van ’n puntstipping in ’n grafiek, is slegs ’n voorstelling van waar die werklike virtuele punt in die plat vlak ter sprake dan ook veronderstel is om te wees. Die simbole vir plus (+), minus ($-$), vermenigvuldig($\times$), vierkantswortel($\sqrt{\ }$), kwadraat($\odot^2$) staan vir *dinge om te doen*. Ons noem hierdie tekens of simbole *operators*. Sekere woorde kan dubbelsinnig wees, maar uit die konteks is dit selde ’n probleem. Een so ’n geval is die gebruik van die woord inverse, ook bekend as die resiprook. Die inverse (resiprook) kan wees die vermenigvuldigingsinverse of die optellings of additiewe inverse (of resiprook) waarby ons nou-nou gaan kom.

Om die struktuur te bespreek, sal dit help om ook die basiese tipes getalle wat voorkom te ken. U is reeds met ’n aantal hiervan bekend. Hier volg ’n kort lysie van die mees basiese tipes getalle:

- $\mathbb{C}$, die komplekse getalle, soms foutiewelik genoem die denkbeeldige getalle, van die vorm $z = x + yi$, waar x en y beide reëele getalle is en $i = \sqrt{-1}$. Die komplekse getalle sluit al die getalsoorte in waarmee ons alledaags te doen kry, die reëele getalle inkluis, d.w.s wanneer $y = 0$ in $\mathbb{C}$.
- *R*, die versameling van reëele getalle, wat ’n deelversameling van die komplekse getalle, $\mathbb{C}$ is, nl. enige getal wat jy jouself op die kontinue getallelyn sou kon voorstel op watter wyse ookal, wat bestaan uit
    - Q, die versameling rasionale getalle, d.w.s daardie getalle wat deur ’n breuk voorgestel kan word waar beide die noemer en die teller heeltallig van aard is, wat onder andere

[1] In toegepaste wiskunde maak dit baie sin om uitdrukkings volledig *in konteks* vol uit te lees deur bv. nie te sê: *x*-kwadraat plus *y* kwadraat nie, maar deur te sê: “die som van die kwadrate van die afstande afgelê”, of wat ookal die geval mag wees. Dit skep onmiddelik begrip vir waarmee ’n mens besig is. Op hierdie manier neem dit miskien meer tyd, maar spaar op die ou einde ook baie tyd, met baie beter begrip.

- Z, die versameling integers of heelgetalle bevat, wat bestaan uit die
  - *N*, Die positiewe heelgetalle, d.w.s. die natuurlike getalle en
  - Nul of te wel “0” asook
  - Die negatiewe heelgetalle.[2]
- *IR*, die irrasionale getalle, d.w.s die reële getalle wat nie rasionaal is nie. Daar is nog deelversamelings hiervan, waaronder die transendentale getalle en ander wat nie nou ter sprake is nie.

’n Verdere getalsoort is die kwatêrnione, wat net ’n dimensie by die komplekse getalle voeg, asook die onderskeid wat getref kan word wat betref nie-standaard wiskunde wat verwys na ’n baie besondere getallegroepering waarmee ons daagliks onbewustelik werk, soos onder andere by differensiasie en integrasie, maar nie regtig dink aan waarmee ons besig is nie, asook die algebraïese getalle, priemgetalle, perfekte getalle, en nog ander.

Let op dat die notasie vir die getalsoorte redelik gestandaardiseer is, maar dat daar soms in die literatuur tog daarvan afgewyk word. Een voorbeeld is die heelgetalle wat soms deur I of H aangedui word. Lees dus maar altyd versigtig en maak seker van die notasie wat gebruik word.

Ons is gewoond daaraan om op skool in sekere operasies getalle op te tel, af te trek, te vermenigvuldig en te deel. Daar is natuurlik nog heelwat meer operasies in wiskunde as hierdie genoemde vier. Die volgorde en assosiasies van baie van die operasies maak dikwels nie saak nie, maar soms wel, bv. $2 + 3 = 3 + 2$, $2 \times 3 = 3\times 2$, maar $2 – 3 \neq 3 – 2$ nie, $2/3 \neq 3/2$ nie, $4(2 + 3) = 4\times 2 + 4\times 3$, 0/3 is toelaatbaar, maar 3/0 is nie toelaatbaar nie, ens. Deur van hierdie reëls bewus te wees en toe te pas, gebruik u reeds streng voorgeskrewe struktuurvoorskrifte wat soos hieronder saamgevat word, sien bv. Herstein[3], Baumslag[4] of Clark[5]. Dis die moeite werd om na meer as een skrywer se uiteensetting te kyk. Dit verbeter die insig, want elke weergawe lig sekere gedagtes beter toe.

Een van die mees basiese strukture is dié van groepe wat beskryf word deur die sg. groepteorie**.** Dis ’n baie groot veld, maar ons gaan slegs na die heel basiese beginsels kyk. U sal verbaas wees dat dit in ’n groot mate net uitspel wat u reeds weet en onbewustelik toepas. Daar is ook geen moeilike wiskundige insig nodig om dit te kan volg nie. Groepe word uit semigroepe en ander voorwaardes opgebou. Verdere uitbouings lei na ringe en velde ens. Ons gaan nie al hierdie gedagtes hier bespreek nie, maar slegs kortliks hul plek in die sisteem aandui asook die nut van hierdie navorsingsveld.

Die ervaring wat ek t.o.v. tale ervaar het, geld ook vir die begrip van die eienskappe van groepteorie. Dit skep dikwels ’n nuwe perspektief in verdere toepassings en uitbreidings in wiskunde. Indien vir jou gesê word dat ’n sekere versameling saam met ’n aangewese operator

---

[2] *N* word hier dus gedefinieer as $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$. In die literatuur sal ’n mens soms ook egter vind dat *N* as $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ gedefinieer word, d.w.s. $N_0 = \{0\} \cup N = \{0, N\}$.

[3] Herstein I.N., Topics in Algebra, Xerox College Publishing, Lexington, 1964, p 26-27.

[4] Baumslag B. and Chandler B., Theory and Problems of Group Theory, , McGraw-Hill Book Company, New York, 1968, p 50.

[5] Clark Allan, Elements of Abstact Algebra,Dover Publications, Inc, New York, 1971, p 19-20.

’n groep vorm, weet jy dadelik wat die eienskappe is van die elemente van die groep en wat jy daarmee kan doen en wat nie[6].

’n Nie-leë versameling S tesame met ’n operator aangedui deur $\circ$, genoem ’n binêre operator, wat op die elemente van S toegepas kan word, soos bv. die optel, vermenigvuldiging of watter geldige operator ookal op enige twee van hierdie elemente van toepassing mag wees, word ’n groep genoem indien aan die volgende voorwaardes voldoen word:

1. Daar is ’n identiteitselement wat dikwels deur die simbool e aangedui word, waar $e \in S$. Hierdie identiteitselement is uniek op so ’n wyse dat vir elke element $a \in S$, is $a \circ e = e \circ a = a$.
2. Elke element $a \in S$ het ’n inverse in S wat impliseer dat daar ’n element $b \in S$ is, sodat $a \circ b = b \circ a = e$, dié e wat in 1. gedefinieer is. Hierdie element b word dikwels aangedui deur die simbool a^{-1}, veral wanneer ons met die vermenigvuldigingsoperator werk of deur $-a$ wanneer ons met die optellingsoperator werk. Hierdie inverse is uniek.[7]
3. Gegewe drie elemente $a, b, c \in S$, geld dat $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \in S$. Die resultaat is dus altyd weer ’n element van S. Ons noem dit die assosiatiewe wet.
4. Let op dat die resultate elke keer elemente is van S. Dus S is geslote onder die gegewe operator.

’n Groep bestaan dus uit

- ’n Nie-leë versameling S met ’n binêre operator $\circ$.
- Die versameling S is geslote onder die binêre operator $\circ$, d.w.s. alle resultate is weer elemente van S.
- Daar is ’n unieke identiteitselement wat ook ’n element is van S.
- Elke element het ’n unieke inverse wat ook ’n element is van S.
- Die assosiatiewe wet geld.

Indien dit verder waar is dat vir enige twee elemente $a, b \in S$, $a \circ b = b \circ a$, sê ons dat dit ’n abelse groep is, of dat die groep se elemente kommutatief is. Hierdie eienskap is nie ’n vereistes vir die bestaan van die groep nie, maar dis dikwels nuttig vir verdere ontwikkelings. (Niels Henrik Abel (1802 – 1829) was ’n Noorweegse wiskundige.[8])

Die aantal elemente in S staan bekend as die *orde* van die groep, wat eindig of oneindig kan wees.

Enkele voorbeelde om bostaande te illustreer volg.

1) Stel $S = N_0 = \{-1, 1\}$, en gebruik $\circ \equiv +$ as operator.

[6] Dis dan ook ’n uiters vereenvoudigde vorm van wat bekend staan as kategoriese wiskunde wat nie verwar moet word met kategoriese data-analise nie.

[7] Hier kom ook voor die probleem van links- sowel as regsinverses, maar ons gaan nie hier daarop klem lê nie, aangesien matrikse en dies meer nie in hierdie artikel ter sprake kom nie.

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Niels_Henrik_Abel

Nou is byvoorbeeld $1+(-1)=0 \notin S$. D.w.s. S is nie geslote onder die optellingsoperator nie. Dus vorm $S=\{1,-1\}$ nie ’n groep onder die optellingsoperator nie.

2) Stel $S=N_0=\{-1,1\}$, en gebruik $\circ \equiv \times$ as operator.

   Nou is $1\times1=1;1\times(-1)=-1$ en $(-1)\times(-1)=1$. Hierdie drie resultate is almal elemente van S en dus is S geslote onder die vermenigvuldigingsoperator. Daar is ook ’n identiteitselement , nl. 1, asook ’n unieke vermenigvuldigingsinverse vir elke element sodat die resultaat die identiteitselement is, nl. 1. Die assosiatiewe wet geld ook. Dus is S ’n groep onder die multiplikatiewe operator.

3) Stel $S=N_0=\{0,1,2,\ldots\}$, d.w.s. die uitgebreide natuurlike getalle. Laat $a,b,c \in S$ wees.

   Ons weet dat vir die operator $\circ \equiv +$, die volgende waar is:

   a) $a+b$ is nie negatief heeltallig, d.w.s $a+b \in S.$ Dus is S geslote onder optelling.
   b) Verder is ook $(a+b)+c=a+(b+c)$. Dus geld die assosiatiewe wet vir optelling.
   c) Beskou $a+0=0+a=a.$ Dus is daar onder optelling ’n identiteitselement $0 \in S,$ waar $S=N_0.$ (Dit geld nié vir die standaard natuurlike getalle, N nie.)
   d) Die vraag is nou, is $S=N_0$ ’n groep onder optelling? Ons kort nog een eienskap, nl. dié van die inverse.
      Die volgende geld egter nie, want indien $a+b=a+(-a)=0$, is $-a \notin S$. Dus is daar nie ’n optellingsinverse of resiprook vir elke $a \in S$ onder optelling in S nie. Ons kom tot die gevolgtrekking dat $S=N_0$ dus nie ’n groep onder die optellingsoperator is nie. Die standaard segswyse is dat N_0 nie ’n additiewe groep vorm nie.

4) Stel $S=N_0=\{0,1,2,\ldots\}$, d.w.s. die uitgebreide natuurlike getalle. Laat $a,b,c \in S$ wees.

   Ons weet dat vir die operator, $\circ \equiv \times$ (vermenigvuldiging) die volgende waar is:

   a) $a\times b$ is nie-negatief heeltallig, d.w.s $a\times b \in S.$ Ons sê S is geslote onder vermenigvuldiging.
   b) Verder is $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c.$ Dus geld die assosiatiewe wet vir vermenigvuldiging.
   c) Beskou $a\times1=1\times a=a.$ Onder vermenigvuldiging is daar dus ’n identiteitselement, nl. 1.
   d) Die vraag is nou, is $S=N_0$ ’n groep onder onder vermenigvuldiging? Ons kort nog een eienskap, nl. dié van die inverse.
      Daar is nie ’n $b \in S$ wat so is dat $a\times b=1$ nie. Daar is dus geen vermenigvuldigingsinverse in S vir a nie. Ons kom dus tot die gevolgtrekking dat $S=N_0$ ook nie ’n groep onder die vermenigvuldigingsoperator is nie, of volgens die standaard taal nie ’n multiplikatiewe groep vorm nie.

5) Stel $S=Z=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$, d.w.s die heelgetalle. Laat $a,b,c \in S$ wees.

Ons weet dat vir die operator $\circ \equiv +$, die volgende waar is:

a) $a+b \in S$. Dus S is geslote onder optelling.
b) Verder is ook $(a+b)+c = a+(b+c)$. Dus geld die assosiatiewe wet.
c) Beskou $a+0=0+a=a$. Dus is daar onder optelling ’n identiteitselement $0 \in S$.
d) Die vraag is nou, is $S = Z$ ’n groep onder optelling? Ons kort nog een eienskap, nl. dié van die inverse.
Indien $a+b=a+(-a)=0$, is $-a \in S$. Dus is daar ’n inverse of resiprook vir elke $a \in S$ onder optelling in S. Ons kom tot die gevolgtrekking dat $S = Z$ dus wel ’n additiewe groep vorm.

6) Stel $S = Z = \{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$, d.w.s die heelgetalle. Laat $a,b,c \in S$ wees.

Ons weet dat vir die operator $\circ \equiv \times$, die volgende waar is:

a) $a \times b \in S$. Ons sê S is geslote onder vermenigvuldiging.
b) Verder is $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c.$Dus geld die assosiatiewe wet vir vermenigvuldiging.
c) Beskou $a \times 1 = 1 \times a = a.$ Onder vermenigvuldiging is daar dus ’n identiteitselement, nl. 1.
d) Die vraag is nou, is $S = Z$ ’n groep onder onder vermenigvuldiging? Ons kort nog een eienskap, nl. dié van die inverse.
Daar is nie ’n $b \in S$ wat so is dat $a \times b = 1$ nie. Daar is dus geen vermenigvuldigingsinverse vir a in S nie. Ons kom dus tot die gevolgtrekking dat $S = Z$ ook nie ’n groep onder die vermenigvuldigingsoperator is nie.

U kan gerus self bestudeer hoekom Q, die versameling van rasionale getalle ’n additiewe groep vorm en ook hoekom dit nie ’n multiplikatiewe groep vorm nie. In die laaste geval skep die teenwoordigheid van 0 ’n probleem, want 0 het nie ’n vermenigvuldiginginverse nie. Toets nou vir $S \equiv \{Q \setminus 0\}$ d.w.s die versameling van rasionale getalle met 0 uitgesluit. Nou het ons nie ’n additiewe groep nie. Hoekom nie? Dit vorm egter nou wél ’n multiplikatiewe groep.

Op dieselfde wyse kan u die versameling van irrasionale getalle bestudeer. Ons het hier ook nie ’n additiewe groep nie. Hoekom nie? Dit vorm egter ook nie ’n multiplikatiewe groep nie, want let op dat byvoorbeeld $\sqrt{3} \times \sqrt{300} = 30 \notin$ IR. Dus, die proses is nie geslote nie.

Om ’n laaste oefening te doen, bestudeer gerus die versameling van reële getalle. Dis interessant dat die reële getalle ’n groep vorm onder beide operasies.

Vir diegene wat bekend is met die komplekse getalle, probeer gerus om die toets vir die komplekse getalle deur te voer.

Dit bring ons by die definisie van ’n ring waarmee ons gaan volstaan voordat ons ’n pragtige toepassing van al hierdie gedagtes aantoon.

Ongelukkig is daar twee wêrelde se definisies vir ’n ring.[9] Ek gee eers die V.K.-weergawe en dan die wysiging daarop wat die V.S.A.- weergawe verteenwoordig. Ons benodig egter eers die gedagte van ’n semigroep. ’n Semigroep vereis slegs die eienskappe van a) ’n binêre operasie, b)geslotenheid en c) assosiatiwiteit. Geen vereistes word gestel ten opsigte van inverses of ’n identiteitselement nie. Indien laasgenoemdes geld, is dit ’n bonus.

V.K. definisie: ’n Ring bestaan uit ’n nie-leë versameling S onderhewig aan twee binêre operasies, gewoonlik additief en multiplikatief, op so ’n wyse dat S ’n additiewe groep vorm en wat onder multiplikatiwiteit ’n semigroep is wat geslote is onder die distributiewe wet vir optelling en aftrekking. Die stelsel in sy geheel moet ook abels wees. Indien die ring boonop ’n multiplikatiewe identiteitselement besit, noem ons die stelsel ’n ring met identiteit. So vorm die heelgetalle ’n ring met identiteit. Uit die aard van die saak vorm die reële getalle ook ’n ring met identiteit.

V.S.A. definisie: Dis dieselfde as dié vir die V.K., maar met die ekstra vereiste dat daar ’n nie-nul identiteitselement teenwoordig móét wees.

Daar bestaan baie verskillende spesifieke groepe in die reële wêreld, soos byvoorbeeld die Poincaré groepe, Lie groepe, Galois groupe, sikliese groepe en vele meer. Die Galois groepe het op ’n manier aanleiding gegee tot die oplossing van ’n eeu-oue probleem, nl.: Gegewe ’n sirkel, hoe sou ’n mens met net ’n liniaal en passer tot jou beskikking ’n vierkant kan konstrueer wat presies, nie by benadering nie, maar presies gelyk is in oppervlakte aan die oppervlakte van die sirkel? Gauss het beweer dat dit nie moontlik is nie, maar het geen bewys daarvoor gegee nie. Pierre Laurent Wantzel het in 1837 bewys dat Gauss wel reg was.[10] Breedweg argumenteer hy dat dit onmoontlik is om $\sqrt{\pi}$ met behulp van ’n liniaal en passer alleen te bepaal, en dit word benodig in die oplossing van die probleem, nl. om x uit $x^2 = \pi r^2$ bereken. Die rede daarvoor is dat $\sqrt{\pi}$ ’n transendentale getal is wat nie aan enige standaard groep onder die operasies van optelling of vermenigvuldiging of enige van ’n reeks ander operasies behoort nie en dus geld die spesifieke groepseienskappe nie daarvoor nie. U mag vra wat ’n transendentale getal dan nou sou wees. Ons aanvaar dit voorlopig net so, anders gaan ons nou baie ver van die huidige onderwerp af weg beweeg. Dit toon egter net weer die geweldige plesier wat in die studie van eenvoudige wiskunde skuil. Voordat jy weet wat jy doen, het jy al weer ’n volgende miernes van plesierige afleiding oop gekrap. In ’n verdere artikel sal ons aandag gee aan ’n paar interessante getalle en reekse, waaronder die transendentale getalle.

Ek vertrou dat u as leser wel kon waarneem en waardeer dat daar baie meer struktuur in ons alledaagse omgaan met doodgewone wiskunde is as wat ons ooit sou kon droom en dat hierdie struktuur vir ons verder deure kan oopmaak met verdere navorsingsmoontlikhede. Wees net bewus daarvan dat bostaande slegs ’n skrefie oopmaak op groepteorie. Daar is baie meer as wat hier beskryf is. Hierdie is net ’n bekendstelling.

---

[9] Collins Dictionary Mathematics, E.J. Borowski & J.M. Borwein, 2nd edition, Harper Collins Publishers, 2002, bl. 490.

[10] http://www.geom.uiuc.edu/docs/forum/square_circle/