Enkele inleidende gedagtes oor priemgetalle

Pieta van Deventer

- If you cannot solve a problem then there is an easier one that you can solve. Find it. – Pólya[1]

- Research mathematics is frustrating. If it is not frustrating you're probably tackling problems that are too easy. – Sarnak[2]

Dit is verbasend dat een van die eenvoudigste begrippe in wiskunde tot soveel gevorderde navorsing gelei het, navorsing wat nog steeds voortgaan – ja, die priemgetallebegrip, dit wil sê dié positiewe heelgetalle, oftewel natuurlike getalle, wat slegs twee afsonderlike faktore het, nl 1 en die getal self. Hierdie skrywe bevat slegs 'n paar kort gedagtes oor priemgetalle – net om die belangstelling dalk te prikkel. Let op dat 1 nie priem is nie, want daar is nie twee afsonderlike faktore nie. Verskeie vrae kan ontstaan oor die priemgetalle, maar ons kyk net na enkeles.[3] Die artikel sluit af met 'n paragraaf met 'n gedagte of twee oor die nut van priemgetalle.

Eindig die priemgetalle iewers? Hoeveel priemgetalle is daar?

Die Switser Euler (1707–1783) het 'n besondere belangstelling in die priemgetalle gehad en het in 'n artikel in 1737 bewys dat die som van die inverses van priemgetalle divergeer. So het hy dan ook baie resultate soos dié waarna ons hier onder verwys, gelewer. Hy het byvoorbeeld ook herbewys dat die aantal priemgetalle oneindig is. Laasgenoemde is reeds ongeveer 300 vC deur Euklides aangetoon.[4] Ons toon hierdie bewys hier soos aangepas.[5]

Veronderstel daar is slegs 'n eindige aantal priemgetalle, sê *n* van hulle. Skep 'n nuwe getal, nl $p = p_1 \times p_2 \times p_3 \times p_4 \times \ldots \times p_n + 1$. Die getal *p* is duidelik groter as enige van die p_i's en kan dus nie een van die *n* eindige aantal priemgetalle wees nie. Gevolglik moet *p* deelbaar wees deur minstens een van ons eindige aantal priemgetalle, sê p_m waar m sodanig dat $1 \le m \le n$, maar as ons vir *p* deel deur p_m bly daar 'n res van 1, wat 'n weerspreking is van ons oorspronklike aanname dat daar 'n eindige aantal priemgetalle is. Gevolglik moet ons aflei dat daar 'n oneindige aantal priemgetalle is.

Hoe is die voorkoms van die priemgetalle oor die getallelyn versprei? Die feite vorm 'n teenstelling. Die priemgetalle kom op 'n ewekansige wyse voor in dié opsig dat daar tot nou toe geen manier gevind kon word hoe om te voorspel waar die volgende priemgetal

---

[1] *Stalking the Riemann Hypothesis*, Dan Rockmore, Jonathan Cape, Londen, 2005, bl 185.
[2] *Stalking the Riemann Hypothesis*, Dan Rockmore, Jonathan Cape, Londen, 2005, bl 216.
[3] In hierdie artikel verwys *inverse* na 'n *vermenigvuldigingsinverse* en nie na 'n *additiewe inverse* nie. Verwys gerus na hierdie begrippe in die veld van groepteorie in bv *Topics in algebra*, IN Herstein, Xerox College Publishing, Lesington, 1964, ble 26, 27.
[4] *Gamma*, Julian Havil, Princeton University Press, Princeton en Oxford, 2003, bl 28.
[5] https://www.math.utah.edu/~pa/math/q2.html.

op die natuurlike-getalle-"lyn" sal wees nie. Aan die anderkant is vasgestel dat vir enige natuurlike getal *x*

$$lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\left[\dfrac{x}{ln\,x}\right]}=1 \text{ , of te wel } \pi(x)\sim\frac{x}{ln\,x},$$

waar $\pi(x)$ dui op die aantal priemgetalle kleiner as *x* en $ln\,x$ op die natuurlike logaritme van *x*, dws die log van *x* met grondtal e. Daar is dus 'n "soort van" kumulatiewe reëlmaat in die voorkoms van die priemgetalle. Lei hierdie formule direk na die waarskynlikheid dat enige ewekansig gekose natuurlike getal wel priem is? Nee, want die verdeling is nie uniform nie. Soos *x* groter word, lei die bogenoemde verhouding wel na 1, maar op voorwaarde dat *x* streef na baie groot en dit kompliseer die saak aansienlik. Hierdie formule vir $\pi(x)$ is al baie verfyn en dit raak al hoe meer gekompliseerd hoe akkurater dit word, maar daar bestaan geen eksakte formule nie. Die verfyning vereis kennis van integrasie sowel as die sg $li(x)$ of $Li(x)$ funksies. Ons gaan nou nie hierop in nie, maar sal teen die einde weer kortliks na hierdie vraag verwys, omdat dit 'n geweldig groot rol in vandag se wiskundige navorsing speel. Dit gaan saam met een van die sg millenniumprobleme van Hilbert soos oorspronklik deur Riemann (1826–1866) gestel en wat dan ook bekend staan as die Riemann-hipotese, wat komplekse getalle, ook bekend as imaginêre getalle, in die proses gebruik.

Let ook op dat $\pi(x)$ ons help om baie benaderd die waarskynlikheid te vind dat 'n ewekansig gekose natuurlike getal priem sal wees deur eenvoudig die inverse te gebruik, nl $\dfrac{1}{\pi(x)}$. Soos *x* groter word, sal $\pi(x)$ groter word en ook dus $\dfrac{1}{\pi(x)}$ al hoe kleiner. Hoe groter *x*, hoe nader aan die waarheid kom ons. Dis egter nie baie akkuraat nie.

Dis maklik om te sien of 'n getal soos 88 of 89 priem is of nie, maar wat van 'n getal soos 4 536 271 234 873? Eerstens is 'n getal wat op 0, 2, 4, 6 of 8 eindig, uit die aard van die saak nie priem nie. Is 4 536 271 234 873 dus priem of nie? Verbasend genoeg is daar wel 'n eenvoudige toets daarvoor. Die tegniek word deur 'n voorbeeld verduidelik. Let op dat hierdie metode geld vir priemgetalle groter as 3 wat dus geen lastighede veroorsaak nie.

Die vraag is of daar 'n oplossing is vir enige een van die volgende twee vergelykings sodanig dat die oplossing 'n element van die natuurlike getalle is, dws

a) $4536271234873=6n+1,$ d.w.s. is $n=\dfrac{4536271234873-1}{6}$ natuurlik?

b) $4536271234873=6n-1,$ d.w.s. is $n=\dfrac{4536271234873+1}{6}$ natuurlik?

Indien enige van die twee vergelykings tot 'n natuurlike getal lei, is dit 'n priemgetal. Nie een van a) of b) is 'n positiewe heelgetal nie. Dus is 4 536 271 234 873 nie priem nie. Toets gerus self hoekom die vereiste van > 3 gestel word.

Hoekom werk hierdie toetsmetode? Let op dat alle natuurlike getalle uitgedruk kan word as $6n-5,\ 6n-4,\ 6n-3,\ 6n-2,\ 6n-1,\ 6n,\ 6n+1,\ 6n+2,\ 6n+3,\ 6n+4,$ of $6n+5$ vir $n\geq 0$ en natuurlik *n* 'n natuurlike getal(kontroleer gerus). Van hierdie is $6n-4,\ 6n-2,\ 6n,\ 6n+2,\ 6n+4$ nie priem nie, want hulle is veelvoude van 2. Verder is $6n-3$ en $6n+3$ veelvoude van 3 en dus ook nie priem nie. Verder is $6n-5\ (n=1,2,3\ldots)$

ekwivalent aan $6n+1$ $\left(n=0,1,2,3\ldots \right)$. Dus bly slegs $6n-1$ of $6n+1$ oor. Gaan dit gerus na.

Die voorkoms van die sogenaamde tweelingpriemgetalle, dws priemgetalle 2 van mekaar geskei, dws die verskil tussen die twee getalle is presies 2, prikkel ook die aandag. Tweelingpriemgetalle (ook genoem priempare of paarprieme) is byvoorbeeld (3,5), (5,7), (11,13), (17,19) ens. Die vraag is of dit met ’n sekere reëlmaat voorkom. Staak dit later soos die getalle groter word, dws is daar dalk net ’n eindige aantal daarvan? Tot op hede is daar nog geen sekerheid oor die voorkoms daarvan nie en of daar ’n oneindige aantal tweelingpriemgetalle is of nie.[6] Volgens Polignac se veronderstelling (*conjecture*)[7] is die aantal oneindig, alhoewel dit al hoe skaarser raak soos ’n mens opgaan in die natuurlike-getalle-lyn. Verdere navorsing dui ook daarop dat Polignac se veronderstelling moontlik korrek kan wees, maar dit kon nog nie bewys word nie. In September 2016 is die grootste tweelingpriemgetalle tot op daardie tydstip vasgestel en dis in 2018[8] bevestig. Hulle is 2 996 863 034 895 x $2^{1290000}$ ± 1. So ook is die aantal pare kleiner as 10^{18} gelyk aan 808 675 888 577 436 pare. Die navorsing hieroor duur voort.

Wat van drielinge? Beskou enige onewe getal – sê ’n onewe getal *x.* Dus moet *x* + 3 of *x* – 3 sy drielingmaat wees en dus uit die aard van die saak ewe en dus nie ’n priemgetal nie. Beskou nou enige ewe getal, sê ’n ewe getal *x*. Dan, onmiddellik, verval die argument verder, want ’n ewe getal is nie priem nie. Dus is daar nie enige drielingpriemgetalle nie.

Dit bring ons by ko-priemgetalle. Ons sê twee getalle is ko-priem (relatief priem) indien hulle slegs een gemeenskaplike deler het, nl 1. Dit stem ooreen met die volgende: Gestel *x* en *y* is ko-priem, dan is die grootste gemene deler GGD(*x*, *y*) = 1. In die taal van priemgetalle word die notasie (*x*, *y*) = 1 soms gebruik. ’n Verdere vraag word soms gevra. Vir ’n gegewe natuurlike getal *x*, hoeveel ko-priemgetalle tussen 1 en *x*, 1 en *x* ingesluit, is daar gekoppel aan die getal *x*? Interessant genoeg het die wiskundiges nie ’n probleem met 1 in die redenasie wat volg nie. Hierdie getal kan bepaal word met Euler se phi-funksie of sg geheelfunksie (*totient function*), nl $\varphi\left(x\right)$.[9] Dis die aantal natuurlike getalle, *k* waarvoor $1\le k\le x$ en GGD(*k, x*) = 1. Neem as voorbeeld die getal *x* = 12. Dan is die relatiewe of ko-priemgetale 1, 5, 7, 11, want GGD(1*,* 12) = 1√, GGD(2*,* 12) = ~~2~~, GGD(3*,* 12) = ~~3~~,…., GGD(11*,* 12) = 1√, GGD(12*,* 12) = ~~12~~. Dus is die aantal $\varphi\left(12\right)=4$. Vir meer oor hierdie besonderse eienskap van priemgetalle, veral indien jy in die wiskundige begrippe *modulus* en *ringe* belangstel, kyk hier onder.[10] Dit kan nogal lastig raak, maar baie interessant – ’n heerlik uitdaging.

’n Uitsonderlike eienskap van priemgetalle is die verwantskap tussen die zeta-funksie en die priemgetalle. Voor ons die zeta-funksie bespreek, laat ons begin by die som van die magte van die inverses van die positiewe heelgetalle $\left\{1,2,3,\ldots\right\}$. Dit kan uitgedruk word itv produkte van funksies van priemgetalle.[11] Die afleiding wat volg, kan op verskillende maniere gedoen word, maar ons volg Havil[12] se benadering feitlik verbatim, effe aangepas vir meer leesbaarheid.

---

6 Gamma, Julian Havil, Princeton University Press, Princeton en Oxford, 2003, bl 30.
7 https://en.wikipedia.org/wiki/Twin_prime.
8 https://en.wikipedia.org/wiki/Twin_prime#Large_twin_primes.
9 https://en.wikipedia.org/wiki/Coprime_integers.
10 https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_totient_function.
11 Gamma, Julian Havil, Princeton University Press, Princeton en Oxford, 2003, bl 61.
12 *Gamma*, Julian Havil, Princeton University Press, Princeton en Oxford, 2003, bl 61.

Ons weet dat enige positiewe heelgetal uitgedruk kan word as die produk van magte van (verskillende) priemgetalle, bv $12 = 2^2 \times 3$. Beskou dus so 'n getal *r*. Dan is

$r = 2^{r_1}3^{r_2}5^{r_3}7^{r_4}\cdots$, waaruit dit volg dat vir enige mag *x* is zeta(*x*), dws

$$\zeta(x) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^x} = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2^{r_1}3^{r_2}5^{r_3}7^{r_4}\cdots\right)^x}$$

$$= \sum_{r_1, r_2, \ldots \geq 0}\frac{1}{2^{xr_1}3^{xr_2}5^{xr_3}7^{xr_4}\cdots}$$

$$= \sum_{r_1 \geq 0}\frac{1}{2^{xr_1}}\sum_{r_2 \geq 0}\frac{1}{3^{xr_2}}\sum_{r_3 \geq 0}\frac{1}{5^{xr_3}}\cdots$$

$$= \prod_{p\ prime}\left(\sum_{k \geq o}^{\infty}\frac{1}{p^{xk}}\right).$$

Gebruik nou die Taylorreeks-ontwikkeling

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ .$$

En dus is

$$\sum_{k \geq o}^{\infty}\frac{1}{p^{xk}} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{p}\right)^x}\ .$$

En hieruit volg dus dat

$$\zeta(x) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^x}$$

$$= \prod_{p\ prime}\left(\sum_{k \geq o}^{\infty}\frac{1}{p^{xk}}\right)$$

$$= \prod_{p\ \ prime}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{p}\right)^x}$$

$$= \prod_{p\ \ prime}\frac{1}{1-p^{-x}}.$$

Die verdeling van priemgetalle tussen al die natuurlike getalle volg nie 'n vaste patroon nie, soos voorheen opgemerk. Nietemin, Riemann het opgemerk dat die voorkoms van die priemgetalle 'n nabye ooreenkoms toon aan die gedrag van bostaande funksie. Of dit dui op 'n verwantskap is nog nie duidelik nie. Let op dat die navorsing gegaan het oor die funksie in terme van die som van die opeenvolgende inverses van natuurlike getalle tot een of ander mag, maar dit het onverwags 'n studie geword van priemgetalle. Hierdie funksie in sy eenvoudigste oorspronklike vorm is dus die uitdrukking

$$\zeta(s) = \sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^s}$$

waar *x* net vervang word deur *s* volgens 'n algemeen aanvaarde konvensie. Hierdie uitdrukking en sy ontwikkeling soos hier bo uitgebrei itv priemgetalle staan dan ook bekend as die Riemann-zeta-funksie. Nou die Riemann hipotese: Riemann het veronderstel (conjectured) dat al die nie-nul-oplossings vir

$$\zeta\left(s\right)=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^{s}}=0$$

op 'n vertikale reguit lyn lê. Hierdie waardes van *s* is van die komplekse vorm $a+bi$ met a = 0.5. Daar is al op baie maniere probeer bewys dat dit so móét wees. Aanvanklik is dikwels gesoek na 'n teenvoorbeeld, maar ten spyte van alle pogings kon nog geen teenvoorbeeld gevind word nie. Alle nie-nul-oplossings wat sover gevind kon word, loop uit op $a=0.5$ met een of ander imaginêre komponent. Gedurende die navorsing het dit begin lyk asof daar 'n direkte verband is tussen die verdeling van die voorkoms van hierdie oplossings en die verdeling van die voorkoms van die priemgetalle. Tot in die jaar, 2005, is reeds 830 miljard zeta-zero's bereken, almal op die sg kritieke lyn, dws met a = 0.5, en 'n variasie van waardes op die imaginêre lyn maar met geeneen wat die teorie weerspreek nie, maar die reëlmaat van die voorkoms van die priemgetalle as 'n "formule" ontwyk ons steeds.[13] Die ontwikkeling van hierdie navorsing en die moeilikheidsgraad daarvan val egter buite die oogmerk van hierdie artikel. 'n Terloopse opmerking: Twee van die bekendste navorsers op hierdie gebied is Peter Sarnak en Percy Deift, beide van Suid-Afrika, maar tans onderskeidelik aan Princeton Universiteit en New York Universiteit verbonde.

Maar wat is die nut van hierdie belangstelling in priemgetalle? Dit speel 'n belangrike rol in die enkodering (*encryption*) van elektroniese boodskappe en die meeste van die elektroniese kommunikasiesisteme vir geklassifiseerde dokumente. Aanlyn banktransaksies se sekuriteit berus in 'n groot mate op priemgetalle en hulle eienskappe. Dit is bykans onmoontlik om hierdie tipe enkoderings te "breek". Dit word ook gebruik in toetsprosedures om die spoed van hoëspoed-rekenaars te toets. Dit het al gelei, en sal in die toekoms steeds lei, tot baie wiskundige navorsing. Baie ander wiskundige probleme is al opgelos in die proses om priemgetalle te deurpriem (bedoeld).[14] Dit speel 'n belangrike rol in wiskundige rekreasie vir niewiskundiges sowel as wiskundiges. In die studieveld van statistiek word dit gebruik om lewensverwagting van mense te bepaal, asook in chaosteorie. Ook in iets so onverwags soos die kwantumteorie word verwantskappe gevind en selfs gespekuleer oor die "vorm" van die heelal, synde dit plat, konkaaf of konveks is en of dit uniform is in daardie sin, deur die skakel met die Riemann-hipotese. Die evolusie van sekere plante "maak gebruik van" priemgetalle deur byvoorbeeld net elke 7, 13 of 17 jaar sekere aksies te toon, selfs in die broeipatrone van sekere plante. Sommige kunstenaars het hulle ook al laat beïnvloed deur die spel met priemgetalle.

Ek vertrou dat hierdie kort artikel met enkele eienskappe van die priemgetalle wél iemand sal prikkel om 'n volgende Peter Sarnak of dalk 'n Percy Deift te word, of om sommer net meer oor hierdie getalle met hierdie vreemde eienskappe te wete te probeer kom.

[13] *Stalking the Riemann Hypothesis*, Dan Rockmore, Jonathan Cape, Londen, 2005, bl 266.
[14] https://en.wikipedia.org/wiki/Prime_number.