Perspektiewe vanaf die B-latfunksies op die Normaalverdeling, toegepas op die Diskrete Pulstransform

C.H. Rohwer

C.H. Rohwer, Universiteit Stellenbosch

Opsomming

Tien jaar gelede is die vermoede uitgespreek dat $\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^\infty x f_{2n}(x)dx \to \sqrt{\frac{12}{\pi}}$, waar f_n die kardinale B-latfunksie van orde n is, en dat die konvergensie monotoon is. Die eerste helfte van die vermoede word hier bewys, maar die monotonisiteit bly 'n ope vraag. Die konvergensie is egter op sy eie voldoende om te bevestig dat die Diskrete Pulstransform (DPT) gebruik kan word om die standaardafwyking van 'n onbekende ry met behulp van die gemiddelde afwyking robuust te skat. Die implikasies van hierdie stelling op die gebruik van DPT-gladstrykers om basiese statistieke van die ruis te bekom, word voorts toegelig.

Trefwoorde: Latfunksies, normaalverdeling, standaard-afwyking, diskrete pulstransform.

Extended abstract

Perspectives from the B-splines on the normal distribution

Given a cardinal B-spline distribution f_n with $F_n(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt$, there is an associated distribution

$$g_n(x) = F_n(x)F_n(-x) = \frac{1}{a_n}F_n(x)(1-F_n(x)), \text{ with } a_n = \int_{-\infty}^{\infty} F_n(x)F_n(-x)dx.$$

Since f_n is symmetric. g_n is also symmetric. Several properties of g_n are interesting and useful:

1. $a_n = \sum_{i=1}^{\infty} i f_{2n+2}(i) = 2\int_{-\infty}^{\infty} F_n^2(t)(1-F_n(t)) = 2\int_{-\infty}^{\infty} F_n(t)(1-F_n(t))^2 dt$

2. The sequence $b_n = \dfrac{a_n}{\sigma_n}$, with $\sigma_n = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} d^2 f_n(x)dx}$, converges to $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, being "very nearly constant very soon".

$$\beta_1 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{300}{400}} \doteq 0.57735, \;\; \beta_2 = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{294}{400}} \doteq 0.57155, \;\; \ldots \;\; \to \frac{1}{\sqrt{\pi}} \doteq 0.56419$$

3. a_n is easily estimable from a given independent identically distributed (i.i.d.) random sequence from f_n, in particular from the first (highest resolution level) pulses in a Discrete Pulse Transform (DPT) of such a sequence.

The above properties were proved in an article [7], except the second, which rested on a "proportionality" conjecture, namely that the sequence converges monotonically decreasingly to $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. This conjecture is convincing from calculating the first dozen or so terms and the limit, obtained from the limiting Gaussian analytically (as originally pointed out by André Weideman).

The usefulness of the properties derived had priority in some difficult real estimation problems analysed, for the purpose of obtaining signals from measurements with severely non-normal noise contamination. Central in the analysis and the design of smoothers for separating signal and noise efficiently is the so-called LULU theory of smoothers, which uses the DPT as an analysis tool in the way that the Fourier Transforms are fundamental in the design of Linear Smoothers of Filters [3]. Since a recent book by Gabbouj and Pearson [5] has identified the LULU theory as providing a different category of smoothers, it was considered that the ongoing research into extending the useful ideas mentioned above deserved another attempt to prove the Proportionality Conjecture.

Deriving some simple identities for the centralised B-splines from known ones resulted in the identities $a_n = \sum_{i=1}^{n} i f_{2n+2}(i) = \int_0^n x f_{2n}(x)dx$ and thus $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |i| f_{2n+2}(i) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{2n}(x)dx$.

Two recursive algorithms for computing a_n are used, namely

$$\sum_{i=1}^{n} i f_{2n+2}(i) = \frac{1}{2n(n+1)}\left[2n(2n-1)\sum_{i=1}^{n-1} i f_{2n}(i) + n^2 f_{2n}(0)\right]$$

and

$$\int_0^{\infty} |x| f_{m+1}(x)dx = \int_0^{\infty} |x| f_m(x)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x) f_m(x)dx, \;\text{ with }\; \varphi(x) = (x - \tfrac{1}{2})^2.$$

The second clearly proves that the sequence $\langle a_n \rangle$ is monotone increasing. Combining the two seemed the first promising route to a proof that $\langle b_n \rangle$ converges monotonically downwards to $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$. The attempt failed marginally, but proved a theorem that established sufficient rapidity of convergence to reaffirm the "near proportionality" of a_n and σ_n. The conviction that the sequence $\langle b_n \rangle$ is monotone decreasing remains however, and should be provable by a subtle refinement in estimates used. This is being pursued, but is not crucial to some important observations and interpretations of results obtained.

Noting that $\langle b_n \rangle \simeq \langle b_{2n} \rangle$, we see that $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_n(x)dx \simeq 2\int_{-\infty}^{\infty} F_n(x)(1-F_n(x))$ for B-splines, and conclude that it is proportional in the limit, when f_n tends to a Gaussian. Furthermore, $\sigma_n \simeq \sqrt{\pi} a_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_n(x) dx$. This means that the "average deviation" of an i.i.d. random sequence is nearly proportional to the "standard deviation". This means exact proportionality in the limit when f is a Gaussian: $2 \int_{-\infty}^{\infty} F(t)(1-F)(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx}$.

Note that of the functionals involved, only one is linear and there is therefore a region in L_2 where the equalities hold. In the same region the Heisenberg Uncertainty Principle is optimal [1] and the Fourier Transform maps the points in the region into the same region.

The sequence of cardinal B-splines converges to elements on this region, and the "near-proportionality" of the functionals approaches the full proportionality at the rate of $\langle b_n \rangle$, which is similar to the approach of the area $\langle a_n \rangle$ of the time-frequency window of the B-splines as it monotonically approaches that of the value $a = \frac{1}{2}$ of the Gaussian [1]; $a_2 = 0,54767,\ a_3 = 0,50382,\ a_4 = 0,50123,\ a_5 = 0,50070,\ a_6 = 0,50047,\ a_7 = 0,50034,\ a_8 = 0,50025 \cdots$

What is apparent is that the popular, and variously argued central limit Theorem can be considered "robust", in the sense that noise can often be reasonably assumed to be from a B-spline, which is finite in support and thus often easier to handle numerically. This is particularly so in the case where robust estimators are needed.

It is well known that the ℓ_1-norm is more robust than the ℓ_2-norm. Similarly, when a finite set of data is used to estimate the characteristic first two parameters of a presumed underlying distribution, the average deviation from the average is less sensitive to outliers than the standard deviation.

To those unfamiliar with the DPT it may be instructive to consider the following simple example of the local estimator involved for an i.i.d. sequence $\langle x_i \rangle$ from a B-spline distribution.

Let $x_i = RND + RND + RND + RND + RND$ with RND being uniform. The underlying distribution is f_5. Let $J = \{j; x_{j-1}, x_{j+1} < x_j\}, 1 \leqslant j \leqslant N$. Then the average of the values $x_j - \max\{x_{j-1}, x_{j+1}\}$ estimates $2 \int_{-\infty}^{\infty} F_5(t)(1 - F_5(t)) dt$ and thus estimates of $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_5(x) dx$ and $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_5(x) dx$ are obtainable from the near proportionality. Similarly the average of $\{\min\{x_{j-1}, x_{j+1}\} - x_j; x_{j-1}, x_{j+1} > x_j\}$ estimates the same values, since f_5 is symmetric. Combining these two estimates thus yields a better estimate, and any significant difference between the two indicates uncertainty in the estimate. (Note that on average $\frac{2}{3}$ of all the points in the index interval $[1, N]$ are used for the estimators involved.)

What is clear is that thresholding, appropriate to assumption of the B-spline involved, is easy to implement on the sets involved. In a recent design problem for a smoother, the data that comes in at a high rate has contamination that is difficult to handle with established theory. It has a component of "well-behaved" noise that can be assumed to come from a B-spline of fairly low order, some randomly occurring very large positive impulses that usually come in pairs, as well as fairly regular significant level changes. By splitting the sequence into two separate sequences, consisting of the even and odd indexes, the problem is converted to the regular identically, independently distributed noise. (The regular level changes are easily handled by LULU-smoothers.)

In the DPT of a sequence the first resolution level contains more than half of the pulses into which a given sequence of i.i.d. data is decomposed, and only very small perturbations are added by a slowly changing signal. Heuristically one can expect that the first few resolution levels should contain most of the information of the underlying noise characteristics involved. The research results presented here, together with some hints of implications, are intended to motivate research into smoothers for separating "signal" and "noise" in the increasingly challenging problems in very high measurement sequences from the sharp edge of modern research, and the associated unconventional types of underlying noise involved.

1. Inleiding

Die einddoel van oudio- en videokommunikasie is om deur mense gehoor en gesien te word. Die metings wat ontvang word, is om verskillende redes nie presies wat uitgestuur is nie, en die algemene gebruik is om daaraan te dink as sein plus ruis (die nimlike woord is ontleen aan hoe kortgolfradio gewoonlik klink). Tegnieke om die sein en ruis van mekaar te skei – bekend as *gladstrykers* wanneer ons uit die oogpunt van die sein dink, of *filters* wanneer ons uit die oogpunt van die ruis dink – is oor baie jare ontwikkel, in die eerste plek natuurlik vir oudiokommunikasie, wat al baie langer met ons is.

Ons ore en oë is egter fundamenteel verskillend uit 'n wiskundige oogpunt, omdat die oor lineêre prosesse gebruik (soos om toonhoogtes te onderskei) terwyl die oog nielineêre prosesse gebruik (soos om skerp rande en skielike bewegings te onderskei). Die tegnieke wat tradisioneel vir oudiofilters gebruik word, werk nie so goed wanneer dit sonder meer ingespan word om videosein van videoruis te onderskei nie.

Die probleem word nog erger wanneer die sein afkomstig is van meetprosesse in die fisika wat tot op die randjie van die meetbare strek, daar waar kwantummeganiese effekte 'n rol speel en Heisenberg se onsekerheidsbeginsel nie verwaarloos kan word nie, soos byvoorbeeld by Raman-spektroskopie, waar lasers gebruik word om individuele molekules waar te neem.

Vir die ontwerp van filters is dit nodig om wiskundige modelle vir sein sowel as ruis te bou. Die model vir die sein het gewoonlik 'n interpretasie binne die spesifieke toepassing (soms eers nadat die metings getransformeer is). Die model vir die ruis is eenvoudiger: blote lukrake kontaminasie. Die geskatte ruis word verkry deur die geskatte sein van die metings af te trek, waarna die ruis se onderliggende verdeling benader kan word.

Die belangrikste teoretiese hulpmiddel, naamlik die Fouriertransform, is reeds ongeveer 200 jaar lank bekend. In die geval van oudiotransmissie bestaan hierdie transform daaruit om klanke as 'n samestelling van suiwer tone van verskillende frekwensies te beskou. Dit is 'n lineêre transform – jy kan twee stelle metings apart transformeer en dan bymekaartel, of jy kan hulle eers bymekaartel en daarna transformeer, en die antwoord bly dieselfde – en dus nie so toepaslik vir ander seine as oudioseine nie. 'n Baie kort puls gee byvoorbeeld 'n baie breë band van frekwensies, terwyl 'n baie kort band van frekwensies net verkry kan word deur tone wat lank aanhou.

'n Mens kan jou afvra hoe die data dan moet lyk as jy wil hê dit moet 'n sogenaamde *eiefunksie* wees, d.w.s. dat die Fouriertransform dit moet transformeer na 'n replika van sigself. Die pragtige antwoord daarop is: die normaalverdeling. Dieselfde klokvormige kromme waarvolgens eksaminatore vir die matriekeksamen jaarliks besluit of die vraestel daardie jaar op standaard was, is ook die kenmerkende vorm van 'n sein wat onveranderd deur die Fouriertransform gaan.

Die gebruiklike model vir ruis is, om onder meer hierdie rede, dat dit uit onafhanklike, identies verdeelde waarnemings uit ’n normaalverdeling bestaan.

Die normaalverdeling het twee kenmerkende parameters: gemiddeld en standaardafwyking. Die gemiddeld van ruis is per definisie nul, en dus bly standaardafwyking alleen oor as die parameter wat bepaal moet word.

Met dié dat moderne metings tot by die rand van die meetbare strek, ontstaan verskeie probleme wat dikwels ’n strategieverandering vereis. Die aanname van ruis uit ’n normaalverdeling is dikwels duidelik nietoepaslik (Raman-spektroskopie lewer byvoorbeeld dikwels reusagtige opwaartse impulse in pare en redelik gereelde groot vlakveranderings), maar daarsonder het additiewe lineêre modelle nie ’n steunbasis nie. Meer plooibaarheid word vereis as ons ’n eenvoudige gladstryker wil ontwerp om ’n beduidende sein van die verswelgende ruis te skei.

Ons kyk dus verby die Fouriertransform na transforms wat nie op kontinuïteit staatmaak nie, en na funksies met ook ’n klokvorm soos die normaalverdeling, maar nie so glad nie.

Hierdie funksies staan bekend as B-latfunksies, en is ongeveer 50 jaar gelede deur die Amerikaanse wiskundige I.J. Schoenberg gedefinieer. Hulle begin by ’n vierkantpuls (oral 0 behalwe net een interval van lengte 1 waarop die funksiewaarde 1 is), daarna ’n tentfunksie (oral 0 behalwe op twee aanliggende intervalle van lengte 1 waarop die funksie teen 45° van 0 na 1 en weer terug gaan), ens., totdat dit nie meer met die oog van ’n normaalverdeling onderskei kan word nie.

Die Diskrete Pulstransform (DPT) is in 2004 bekendgestel. Dit is ’n tegniek om ’n string waarnemings as ’n som van kort en lang vierkantpulse te skryf, en kan bereken word met ’n aantal berekeninge per waarneming wat nie meer word saam met die aantal waarnemings nie. (Selfs die vinnige Fouriertransform het nie daardie eienskap nie.) Ek het egter eers ’n paar jaar daarna tot die insig gekom dat die DPT as ’n diskrete Fouriertransform gesien kan word – en die skakel tussen die DPT en die normaalverdeling is die B-latfunksies.

In die aanvanklike afleiding van die gebruik van die DPT om die standaardafwyking van data te skat, was daar ’n gaping. ’n Sekere stelling kon nie bewys word nie. Talle spesiale gevalle is bevestig, maar dit beteken nie dat dit *altyd* so moet wees nie.

Daardie gaping word in hierdie artikel toegestop.

2. B-Latfunksies op gelykgespasieerde partisies

Ons begin by die elegante klassieke afleidings van die basiese eienskappe van B-latfunksies op gelykgespasieerde partisies, en gaan daarvandaan voort om nuwe eienskappe te ontbloot en te bewys. Ter wille van leesbaarheid en insig is dit goed om enkele bekende en minder bekende eienskappe wat benodig word, weer kortliks af te lei en nuttige en insiggewende interpretasies te maak.

Latfunksies word gewoonlik gedefinieer as stuksgewyse polinome met diskontinuïteite in hulle hoogste afgeleide by sekere punte, genoem knope. Wanneer die knope egter gelykgespasieerd is, kan al die besonderhede weggesteek word in ’n formulering as konvolute van funksies wat oor die hele reële as gedefinieer is. Die latfunksies wat so verkry word, staan as *kardinale B-latfunksies* (cardinal B-splines) bekend.

In die volgende definisie word die Iverson-delta gebruik, wat aan logiese uitdrukkings 0-1 waardes toeken sodat hulle in algebraïese uitdrukkings gebruik kan word, bv. $(|x| < a) = 1$ as $|x| < a$, en nul andersins.

Die natuurlike begin is by die B-latfunksie van orde 1 (graad 0): $f_1(x) \equiv (|x| < \frac{1}{2})$. Dit verteenwoordig die uniforme distribusie, wat die natuurlike model is vir byvoorbeeld die foute wat ontstaan wanneer lesings tot 'n spesifieke desimaal afgerond word. Die som (of verskil) van twee sulke getalle kom uit 'n verspreiding gegee deur $f_2(x) = (1 - |x|)(|x| < 1)$, wat die orde 2 (en graad 1) het.

Dit is algemene praktyk (byvoorbeeld [1]) om by die volgende fundamentele identiteite uit te kom:

(a) $f_{m+n}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(x-t) f_n(t) dt$.

(b) $f_k(x) = \dfrac{\delta^k x_+^{k-1}}{(k-1)!}$, met $x_+ = x(x > 0)$, en $(\delta f)x \equiv f(x + \frac{1}{2}) - f(x - \frac{1}{2})$.

(c) $f_{k+1}(x) = \dfrac{x + \frac{k+1}{2}}{k} f_k(x + \frac{1}{2}) + \dfrac{(\frac{k+1}{2} - x)}{k} f_k(x - \frac{1}{2})$.

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} f_m(x) dx = 1$, vir elke heeltal m.

Definisie: $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t) dt$, die kumulatiewe distribusie van f_n. Maklik afleibaar is:

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -\frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2}, & x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases} \quad \text{en} \quad F_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1 \\ \frac{1}{2}(x+1)^2, & x \in (-1, 0] \\ 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Deur die grafieke van die eerste paar B-latfunksies, genormaliseer na dieselfde standaardafwyking, te betrag, word dit duidelik dat die funksies $\sqrt{n} f_n(\sqrt{n} x)$ baie vinnig konvergeer na die normaalverdeling met dieselfde standaardafwyking. Vir $n = 5$ is die grafieke skaars met die oog te onderskei. Verder is dit duidelik dat $f_n(x) = 0$ vir $x \notin [-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]$, sodat die steungebied beperk is tot $[-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]$.

Hoewel die meeste eienskappe van die B-latfunksies wyd bekend is, word die bewys van die volgende stelling kortliks gegee om die eenvoud te illustreer.

Stelling 1: Fundamentele eienskappe van die B-latfunksies $f_n(x), n > 1$.

(a) $\dfrac{d}{dx} f_n(x) = \delta f_{n-1}(x) = f_{n-1}\left(x + \dfrac{1}{2}\right) - f_{n-1}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ en

$\dfrac{d^2}{dx^2} f_n(x) = \delta^2 f_{n-2}(x) = f_{n-2}(x+1) - 2 f_{n-2}(x) + f_{n-2}(x-1)$, waar die afgeleides bestaan.

(b) $f_n(-x) = f_n(x)$, en dus $F_n(0) = \frac{1}{2}$ en $F_n(x) = 1 - F_n(-x)$.

(c) $f_{n+2}(y) = \int_y^{y+1} F_k(x)dx - \int_{y-1}^{y} F_k(x)dx$ en dus

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2n+2}(i) = \sum_{i=-n}^{-1} f_{2n+2}(i) = 1 - \int_0^1 F_{2n}(x)dx$$
$$= \tfrac{1}{2}[1 - f_{2n+2}(0)]$$

(d) $\sum_{i=1}^{n} i f_{2n+2}(i) = \int_0^n x f_{2n}(x)dx$ en dus; $\sum_{-\infty}^{\infty} |i| f_{2n+2}(i) = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{2n}(x)dx.$

Bewys:

(a) Differensiasie van $f_n(x) = \dfrac{\delta^k x_+^{n-1}}{(n-1)!}$ gee

$$f_n'(x) = \delta\left(\frac{\delta^{n-1}x_+^{n-2}}{(n-2)!}\right) = \delta f_{n-1}(x) = f_{n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right) - f_{n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

Net so is

$$f_n''(x) = \delta^2 f_{n-2}(x) = f_{n-2}(x+1) - 2f_{n-2}(x) + f_{n-2}(x-1).$$

(b) f_1 is simmetries. As f_n simmetries is, volg dit dat

$$\begin{aligned} f_{n+1}(-x) &= \frac{-x+\frac{n+1}{2}}{n} f_n\left(-x+\frac{1}{2}\right) + \frac{\frac{n+1}{2}+x}{n} f_n\left(-x-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\frac{n+1}{2}-x}{n} f_n\left(x-\frac{1}{2}\right) + \frac{x+\frac{n+1}{2}}{n} f_n\left(x+\frac{1}{2}\right) = f_{n+1}(x). \end{aligned}$$

Verder is $\int_{-\infty}^{0} f_n(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)dt = \frac{1}{2}$ omdat $\mu_0(n) = 1$. Ook is $F_n(x) - \frac{1}{2}$ antisimmetries sodat $F_n(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - F_n(-x)$.

(c) $f_{k+2}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) f_2(y-x)dx$, van die konvolusie-eienskap

$$\begin{aligned} &= \int_{y-1}^{y+1} f_k(x) f_2(y-x)dx, \text{ omdat } f_2(y-x) = 0 \text{ as } x \notin [y-1, y+1] \\ &= \int_{y-1}^{y} f_k(x)(x-y+1)dx + \int_y^{y+1} f_k(x)(y+1-x)dx \\ &= (x-y+1)F_k(x)\Big|_{y-1}^{y} - \int_{y-1}^{y} F_k(x)dx + \int_y^{y+1} F_k(x)dx + (y+1-x)F_k(x)\Big|_y^{y+1} \\ &= F_k(y) - \int_{y-1}^{y} F_k(x)dx + \int_y^{y+1} F_k(x)dx - F_k(y) \\ &= \int_y^{y+1} F_k(x)dx - \int_{y-1}^{y} F_k(x)dx \end{aligned}$$

Dus volg dit dat $\sum_{i=1}^{n} f_{2n+2}(i) = \int_{n+1}^{n+2} F_{2n}(x)dx - \int_0^1 F_{2n}(x)dx = 1 - \int_0^1 F_{2n}(x)dx$

$$= \int_0^1 (1 - F_{2n}(x))dx = \int_{-1}^0 F_{2n}(x)dx$$

en $\sum_{i=-n}^{-1} f_{2n+2}(i) = 1 - \int_0^1 F_{2n}(x)dx$. Deur op te tel is

$$\begin{aligned}\sum_{i=-n}^{n} f_{2n+2}(i) &= 1 - \left(\int_0^1 F_{2n}(x)dx - \int_{-1}^0 F_{2n}(x)dx\right) + f_{2n+2}(0) \\ &= 1 - f_{2n+2}(0) + f_{2n+2}(0) = 1\end{aligned}$$

Natuurlik volg dit maklik uit die sterker stelling wat direk uit die Variasieverminderende benadering met latfunksies volg: Vir elke k is $\sum_{-\infty}^{\infty} f_k(x) = 1$.

(d) $\sum_{i=1}^{n} i f_{2n+2}(i) = \sum_{i=1}^{n} i \int_i^{i+1} F_{2n}(x)dx - \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \int_i^{i+1} F_{2n}(x)dx$

$$= n - \int_0^n F_{2n}(x)dx$$

$$= \int_0^n x f_{2n}(x)dx, \text{ deur deelwyse integrasie.}$$

Dus is $\sum_{i=-n}^{n} |i| f_{2n+2}(i) = \int_{-n}^{n} |x| f_{2n}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{2n}(x)dx$.

Twee rekursieformules vir die berekening van $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_n(x)dx$ word nou afgelei. Al twee is nodig in die daaropvolgende gevolgtrekkings.

Stelling 2: Laat f_m 'n B-latfunksie wees en $\phi(x) = (\frac{1}{2} - |x|)^2$.

Dan is $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{m+1}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_m(x)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \phi(x) f_m(x)dx$.

Bewys: $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{m+1}(x)dx = \frac{x|x|}{2} f_{m+1}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x|x|(f_m(x+\tfrac{1}{2}) - f_m(x-\tfrac{1}{2}))$

$$= \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u+\tfrac{1}{2})|u+\tfrac{1}{2}| f_m(u)du - \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u-\tfrac{1}{2})|u-\tfrac{1}{2}| f_m(u)du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) f_m(u)du, \quad \text{met}$$

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \tfrac{1}{2}[(u+\tfrac{1}{2})|u+\tfrac{1}{2}|-(u-\tfrac{1}{2})|u-\tfrac{1}{2}|] = \begin{cases} u & , \quad \text{vir } x > \tfrac{1}{2} \\ u^2+\tfrac{1}{4} & , \quad \text{vir } x \in [-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}] \\ -u & , \quad \text{vir } x < -\tfrac{1}{2}. \end{cases} \\ &= |u| + \phi(x)(x \in [-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]), \text{ met } \phi(x) = (x^2+\tfrac{1}{4}-|x|).\end{aligned}$$

Dus is $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{m+1}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_m(x)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \phi(x) f_m(x)dx$, wat 'n rekursieformule gee vir die gemiddelde afwyking van f_{m+1}. □

Ons let op dat $\phi(x) \geqslant 0$ in $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ en dat

$$e_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \phi(x) f_m(x)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \phi(x) f_m(x)dx \in \left[\frac{f_m(\frac{1}{2})}{12}, \frac{f_m(0)}{12}\right].$$

Voorbeeld: $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_1(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)$ of $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$.

Dit is duidelik dat 'n soortgelyke stelling bewys kan word:

$$\int_0^{\infty} x f_{m+1}(x)dx = \int_0^{\infty} x f_m(x)dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}-x\right)^2 f_m(x)dx.$$

Dit is effens meer algemeen, en het die ander as afleiding uit die simmetrie van f_m en f_{m+1}.

Vir die tweede rekursieformule word slegs die een vir ewe orde as volg bewys.

Stelling 3: Vir elke B-latfunksie f_{2n} geld dat

$$\sum_{i=1}^{n} i f_{2n+2}(i) = \frac{(2n-1)}{(2n+1)} \sum_{i=1}^{n-1} i f_{2n}(i) + \frac{n}{2(2n+1)} f_{2n}(0).$$

Bewys: Die bekende identiteit $f_{k+1}(x) = \dfrac{x+\frac{k+1}{2}}{k} f_k(x+\frac{1}{2}) + \dfrac{\frac{k+1}{2}-x}{k} f_k(x-\frac{1}{2})$ kan toegepas word met $k = 2n+1$, en weer twee keer met $k = 2n$ om die volgende te lewer:

$$\begin{aligned} f_{2n+2}(j) = \frac{1}{2n(2n+1)}&[(n+1+j)^2 f_{2n}(j+1) + (n+1-j)^2 f_{2n}(j-1) \\ &+((n+1+j)(n-j)+(n+1-j)(n+j)f_{2n}(j)].\end{aligned}$$

Deur te vermenigvuldig met j en te sommeer, volg dat $2n(2n+1)\sum_{j=1}^{n} j f_{2n+2}(j) =$

$$\left[\sum_{j=1}^{n} j(n+j+1)^2 f_{2n}(j+1) + \sum_{j=1}^{n} (2n(n+1)-2j^2) j f_{2n}(j) + \sum_{j=1}^{n} j(n-j+1)^2 f_{2n}(j-1)\right].$$

Die drie somme kan herskryf word met $f = f_{2n}$, as

$$n^2\sum_{j=1}^{n} jf(j+1)+2n\sum_{j=1}^{n} j(j+1)f(j+1)+\sum_{j=1}^{n} j(j+1)^2 f(j+1),$$

$$2n(n+1)\sum_{j=1}^{n} jf(j)-2\sum_{j=1}^{n} j^3 f(j), \text{ en}$$

$$n^2\sum_{j=1}^{n} jf(j-1)-2n\sum_{j=1}^{n} j(j-1)f(j-1)+\sum_{j=1}^{n} j(j-1)^2 f(j-1).$$

Deur die terme te hergroepeer en te herindekseer volg dit dat

$$\begin{aligned}
& n^2\sum_{i=2}^{n+1}(i-1)f(i)+2n(n+1)\sum_{i=1}^{n} if(i)+n^2\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)f(i) \\
= \; & n^2\sum_{i=2}^{n+1} if(i)-n^2\sum_{i=2}^{n+1} f(i)+2n(n+1)\sum_{i=1}^{n} if(i)+n^2\sum_{i=0}^{n-1} if(i)+n^2\sum_{i=0}^{n-1} f(i) \\
= \; & (4n^2+2n)\sum_{i=1}^{n-1} if(i)+n^2 f(0)
\end{aligned}$$

en $\quad 2n\sum_{i=2}^{n+1}(i-1)if(i)-2n\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)if(i)$

$$=-4n\sum_{i=1}^{n-1} if(i)$$

en $\quad \sum_{i=2}^{n+1} i^3 f(i)-\sum_{i=2}^{n+1} i^2 f(i)-2\sum_{i=1}^{n} i^3 f(i)+\sum_{i=0}^{n-1} i^3 f(i)+\sum_{i=0}^{n-1} i^2 f(i)=0$

In al die somme van die vorm $\sum i^k f(k)$ hoef die sommasie net tot $n-1$ te gaan, omdat $f(n) = f(n+1) = 0$, weens die begrensde steungebied van f_{2n}.

Deur te sommeer volg dat

$$\sum_{i=1}^{n} if_{2n+2}(i)=\frac{4n^2-2n}{4n^2+2n}\sum_{i=1}^{n-1} if_{2n}(i)+\frac{n^2}{2n(2n+1)}f_{2n}(0),$$

wat die bewering bewys, en 'n alternatiewe rekursiewe formule vir die waarde $\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} if_{2n+2}(i)$ gee. □

Lemma 1: Laat f_n and f_{n+1} twee B-latfunksies wees met $n > 1$. Dan is beide, en beide se afgeleides, monotoon afnemend in $[0, \frac{1}{2}]$ en $f_n(0) > f_{n+1}(0) > (1-\frac{1}{n+2})f_n(0)$.

Bewys: $f_{n+1}(0) = \dfrac{n+1}{n} f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$, van die rekursievergelyking vir $f_{n+1}(x)$ met $x = 0$, en die simmetrie van f_n. Verder is

$$\frac{d}{dx} f_{n+1}(x) = \delta f_n(x) = f_n\left(x + \frac{1}{2}\right) - f_n\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

As f_n streng monotoon afnemend is in $[0,1]$, is $f'_{n+1} < 0$, en f_{n+1} dus ook streng monotoon afnemend. $f_2(x)$ is streng monotoon afnemend in $[0,1]$, sodat dit volg deur induksie dat $f_n(x)$ streng monotoon afnemend is in $[0,1]$, vir alle $n \geqslant 2$.

$f_{n+1}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_n(x)dx \leqslant 2\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(x)dx < 2\int_0^{\frac{1}{2}} f_n(0) = f_n(0)$ omdat $f_n(x) < f_n(0)$. Omdat f'_n afnemend is in $[0, \frac{1}{2}]$, word die integraal onderskat deur die trapesiumreël, sodat

$$f_{n+1}(0) > 2 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{f_n(0) + f_n(\frac{1}{2})}{2}\right) = \tfrac{1}{2} f_n(0) + \tfrac{1}{2} f_n\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

of

$$2f_{n+1}(0) > f_n(0) + f_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = f_n(0) + \frac{n}{n+1} f_{n+1}(0).$$

Dus is:

$$\left(2 - \frac{n}{n+1}\right) f_{n+1}(0) > f_n(0), \text{ of } f_{n+1}(0) > \frac{n+1}{n+2} f_n(0) = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) f_n(0).$$

□

Lemma 2: Laat $\alpha_n = \int_0^\infty x f_{2n}(x)dx$ vir $n > 1$, $\xi_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)(f_{2n-1}(x) + f_{2n-2}(x))dx$, en $\varphi(x) = (\frac{1}{2} - x)^2$. Dan is $\left|\dfrac{\alpha_{n-1}}{n-1+\sqrt{n(n-1)}} - \xi_n\right| < \dfrac{f_{2n}(0)}{2n}$.

Bewys: $\alpha_n = \dfrac{2n-1}{2n+1}\alpha_{n-1} + \dfrac{n}{2(2n+1)} f_{2n}(0) = \alpha_{n-1} + \xi_n$, vanaf die rekursievergelykings vir α_n uit Stellings 2 en 3 en 1(d). Hieruit volg dat $\alpha_{n-1} = \frac{n}{4} f_{2n}(0) - (n + \frac{1}{2})\xi_n$ en

$$\frac{\alpha_{n-1}}{2n} = \frac{f_{2n}(0)}{8} - \frac{\xi_n}{2} - \frac{\xi_n}{4n}.$$

Dus is

$$\frac{\alpha_{n-1}}{2n-w} = \xi_n + \frac{2n}{2n-w}\left[\frac{f_{2n}(0)}{8} - \frac{3n - w + \frac{1}{2}}{2n}\xi_n\right], \text{ met } w = 1 + n - \sqrt{n(n-1)},$$

of

$$\frac{\alpha_{n-1}}{2n-w} - \xi_n = \frac{2n}{8(2n-w)}\left[f_{2n}(0) - \left(12 + \frac{2-4w}{n}\right)\xi_n\right].$$

Uit Lemma 1 volg dat $f_{2n-2}(x) \leqslant \dfrac{2n}{2n-1} f_{2n-1}(0)$, sodat

$$\xi_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)(f_{2n-1}(x) + f_{2n-2}(x))dx \leqslant (f_{2n-1}(0) + f_{2n-2}(0)) \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)dx$$

$$\leqslant \frac{1}{24}\left(1+\frac{2n}{2n-1}\right) f_{2n-1}(0), \text{ omdat } \varphi(x) > 0, \text{ en alle } B\text{-latfunksies se maksimum by 0 is.}$$

Uit die vorige Lemma geld ook dat $f_{2n-1}(0) < \dfrac{2n+1}{2n} f_{2n}(0)$, sodat

$$\xi_n \leqslant \frac{1}{24}\left(1+\frac{2n}{2n-1}\right)\left(\frac{2n+1}{2n}\right) f_{2n}(0)$$

Dus is $f_{2n}(0) - 12\left(\dfrac{1-(4w-2)}{12n}\right)\xi_n > f_{2n}(0) - \dfrac{12}{24}\left(1-\dfrac{4w-2}{12n}\right)\left(\dfrac{4n-1}{2n-1}\right)\left(\dfrac{2n+1}{2n}\right) f_{2n}(0)$, wat groter is as $-\dfrac{f_{2n}(0)}{2n}$ wanneer $w \in [1,2]$ sodat

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{4w-2}{12n}\right)\left(\frac{4n-1}{2n-1}\right)\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \leqslant 1+\frac{1}{2n}.$$

Maar $1 < w = 1+n+\sqrt{n(n-1)} = \dfrac{3n+1}{1+n+\sqrt{n((n-1)}} < \dfrac{3n+1}{1+n+n-1} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2n} < 2.$

Vir die ander deel van die ongelykheid geld die volgende: Elke B-latfunksie is monotoon nie-toenemend in $[0,\frac{1}{2}]$ sodat

$$\begin{aligned}
\xi_n &= \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)(f_{2n-1}(x)+f_{2n-2}(x))dx \geqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)(f_{2n-1}(\tfrac{1}{2})+f_{2n-2}(\tfrac{1}{2}))dx \\
&= (f_{2n-1}(\tfrac{1}{2})+f_{2n-2}(\tfrac{1}{2}))\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(x)dx \\
&= \left(\frac{2n-1}{2n} f_{2n}(0) + \frac{2n-2}{2n-1} f_{2n-1}(0)\right)\tfrac{1}{24}, \text{ weens Lemma 1.} \\
&\geqslant \left(\frac{2n-1}{2n} f_{2n}(0) + \frac{2n-2}{2n-1} f_{2n}(0)\right)\tfrac{1}{24}, \text{ omdat } f_{2n}(0) \leqslant f_{2n-1}(0) \\
&= \frac{1}{24}\left(\frac{8n^2-8n+1}{4n^2-2n}\right) f_{2n}(0).
\end{aligned}$$

Dus is

$$f_{2n}(0) - 12\left(1-\frac{4w-2}{12n}\right)\xi_n < f_{2n}\left(1-\left(-\frac{4w-2}{12n}\right)\left(1-\frac{4n+1}{n^2-n}\right)\right)$$

Deur die boonste grens $\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}$ vir w in te stel volg dit dat die regterkant kleiner is as $\dfrac{f_{2n}(0)}{2n}$ vir $n \geqslant 1$. Dit voltooi die bewys van die lemmas. □

Stelling 4: Laat $\beta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\infty} x f_{2n}(x)dx$ vir $n > 1$. Dan konvergeer die ry $\langle\beta_n\rangle$ na $\sqrt{\frac{12}{\pi}}$.

Bewys:

$$\begin{aligned}
\beta_n - \beta_{n-1} &= \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} - \frac{\alpha_{n-1}}{\sqrt{n-1}}, \quad \text{met} \quad \alpha_n = \int_0^\infty x f_{2n}(x)dx \\
&= \frac{\alpha_{n-1} + \xi_n}{\sqrt{n}} - \frac{\alpha_{n-1}}{\sqrt{n-1}}, \quad \text{van Stelling 2} \\
&= \frac{\alpha_{n-1}(n-1-n)}{\sqrt{n(n-1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})} + \frac{\xi n}{\sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\xi_n - \frac{\alpha_{n-1}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n(n-1)}}\right)
\end{aligned}$$

Dus is $|\beta_n - \beta_{n+1}| < \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{f_{n2}(0)}{2n} = \frac{f_{2n}(0)}{2} n^{-\frac{3}{2}}$, en vir elke $m > n$ geld dat

$$|\beta_n - \beta_m| < \frac{1}{2} f_{2n}(0) \left(\sum_{i=n}^{m-1} i^{-\frac{3}{2}}\right) < \frac{1}{2} f_{2n}(0) \int_{n-1}^\infty x^{-\frac{3}{2}} dx < f_{2n}(0) \frac{1}{\sqrt{n-1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

Duidelik is dat $\langle \beta_n \rangle$ ’n Cauchy-ry is, wat konvergent is. $\square$

Alles word ondersteun [7] deurdat $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{12}{n}}\sum_{i=1}^{n} i f_{2n+2}(i)$ se limiet gevind was as $\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Die limiet word gegee deur $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{12}{\pi}}$, aangesien $\lim_{n\to\infty} f_{2n}$ die gausiese verdeling gee [7]. Die geloof bly sterk dat die konvergensie van β_n monotoon is en word verder ondersoek.

3. Toepassings

Weens die noodsaaklikheid van oudiotransmissie oor telefoonlyne en radiokommunikasie is uitvoerige navorsingsresultate bekend oor hoe onafhanklike identies verdeelde ruis deur die Fouriertransform afgebeeld word, en hoe hierdie kennis gebruik kan word om gladstrykers (filters) te ontwerp. Omdat die stroombane in die transmissiestelsels prakties lineêr is, het die bekende lineêre filterteorie wye bekendheid verwerf, deur byvoorbeeld [3]. Dit is toepaslik vir oudiotransmissie, ook omdat die menslike oor goed gemodelleer kan word deur ’n golfietransform [1].

Met die koms van digitale beeldverwerking het nuwe probleme ontstaan, veral deurdat die oog nielineêre prosesse gebruik. Lineêre prosesse word erg versteur deur kort impulse of impulsiewe ruis. Die Heisenberg-onsekerheidsbeginsel waarborg dat die tyd-frekwensie-venster van f en sy transform se area van onder begrens is, sodat kort pulse wye frekwensiebande gee [1].

Die teorie van golfies (“wavelets”) het wye belangstelling ontketen maar kan ook nie die onsekerheidsbeginsel omseil nie. Die oordeelkundige voorgladstryking van datarye is gebruik om die defekte van lineêr gladstrykers te verminder, maar ’n teorie vir nielineêre gladstrykers het ontbreek.

So 'n teorie het uit praktiese toepassings sowat 30 jaar gelede geleidelik ontstaan, en is later begryp as 'n spesifieke deel van wiskundige morfologie met sterk addisionele wiskundige strukture. 'n Monografie oor die teorie het in 2005 verskyn [6], en die Diskrete Pulstransforms [8] is as sulks formeel bekend gestel in 2006. In 2016 het Pearson en Gabbouj die sogenoemde LULU-teorie formeel as 'n alternatiewe kategorie tot die lineêre filterteorie geïdentifiseer [5].

In 'n poging om die oordrag van suiwer ruis deur 'n pulstransform te ondersoek, is bewys dat die eerste (hoogste) resolusievlak van so 'n pulstransform meer as die helfte van die totale aantal pulse in die dekomposisie bevat, en getoon dat hul gemiddelde amplitude 'n byna lineêre skatter van die standaardafwyking van die ruis is, mits 'n geloofwaardige hipotese waar is. Die hipotese was dat die ry $\left\{\beta_n = \dfrac{\alpha_n}{\sqrt{n}}\right\}$ monotoon dalend is na sy limiet. Die stelling wat hier bewys is, bewys slegs die konvergensie. Dit is egter genoegsaam vir die oorspronklike doel wat met die volgende stelling saamhang:

Stelling: Gegee 'n ry suiwer ruis, gevorm deur lukrake getalle uit 'n distribusie f, met $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$, is die gemiddelde waarde die amplitudes van die hoogste (eerste-) resolusievlak van die Diskrete Pulstransform (DPT) proporsioneel aan $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)(1-F(x))dx$.

Hierdie stelling is bewys in 'n artikel [7]. Hieruit is sonder bewys afgelei dat wanneer f "byna normaal" is, in die sin dat dit 'n B-latfunksie is, is hierdie waarde μ "baie naby" proporsioneel aan die standaardafwyking σ van f. Dit gee 'n aantal interessante insigte:

1. Vir 'n normaalverdeling f is die waarde $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)(1-F(x))dx$ proporsioneel aan σ. Die waarde van σ kan dus direk geskat word uit 'n ry getalle soos hulle beskikbaar word in reële tyd. Verder is dit 'n gemiddelde van verskille van sommige opeenvolgende waardes van die ry! Hierdie verrassende insig word weerspieël in die verdere stelling [7] dat as f_n 'n B-latfunksie is, die vergelyking $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} F_n(x)(1-F(x))dx = \sum_{i=1}^{\infty} i f_{2n+2}(i)$ geld.

   Uit die identiteit van Stelling 1(d) volg nou dat

   $$\int_{-\infty}^{\infty} F_n(x)(1-F_n(x))dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{2n}(x)dx = 2\int_{0}^{\infty} x f_{2n}(x)dx.$$

   Hierdie identiteit is verrassend. Die linkerkant is 'n nielineêre funksionaal op die ruimte van distribusies, terwyl die regterkant 'n lineêre funksionaal op dieselfde ruimte is! Dit lyk na 'n teenspraak, en sou wees as f_{2n} vervang sou word met f_n in die vergelyking se regterkant. Soos die vergelyking staan, geld:

   $$\int_{\infty}^{\infty} F_n(x)(1-F_n(x))dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x| C(f_n, f_n)(x)dx,$$

   waar $C(f_n, f_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x-t)f_n(t)dt$, die konvoluut van f_n met f_n is, wat die verspreiding is van verskille van 'n lukrake ry met verspreiding f_n! Daar lê egter 'n verdere insiggewende verrassing net onder die oppervlak!

2. Die formele argumentering van hierdie artikel lei tot die laaste stelling wat die konvergensie van β_n na $\dfrac{1}{\sqrt{12\pi}}$ gee. Die argumente in die bewys mislei effens oor die werklike

aard van die konvergensie wat sigbaar is in die eerste paar stappe en die plat neiging na die limiet:

$$\beta_1 = 0,166066,\ \beta_2 = 0,16499,\ \lim_{n\to\infty} \beta_n = \frac{1}{\sqrt{12\pi}} \simeq 0,1628675.$$

Dit is die oortuiging dat hierdie konvergensie wel monotoon dalend is, soos in die oorspronklike vermoede geformuleer, en numeries geverifieer.

Die verrassende implikasie is egter dat $\int_{-\infty}^{\infty} F_n(x)(1-F_n(x))dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{2n}(x)dx$ 'n baie goeie nielineêre benadering tot $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_n(x)dx$ is, die lineêre funksionaal wat die gemiddelde afwyking van die gemiddelde waarde van 'n lukrake ry uit die distribusie f_n gee. Die konvergensie van die ry β_n, en veral sy verskille $\triangle\beta_n$, toon dat

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{2n}(x)}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{2n}(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}} \simeq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_n(x)dx}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_n(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}},$$

wat 'n byna-proporsionaliteit gee tussen standaardafwyking en gemiddelde afwyking van B-latfunksies.

Hieruit kan afgelei word dat daar in die limiet eksakte proporsionaliteit met faktor $\sqrt{\pi/2}$ tussen die standaard- en gemiddelde afwyking is. Hoewel hierdie feit nie algemeen in statistiek-handboeke voorkom nie (die gesaghebbende werk van Jaynes [4], byvoorbeeld, bestee 'n hele hoofstuk aan die normaalverdeling sonder om dit te noem), is dit nie 'n nuwe resultaat nie: dit word in [2] bewys en dan gebruik om te toets hoe naby aan normaal 'n gegewe verdeling is.

Verwysings

[1] C.K. Chui. *Wavelets: A mathematical tool for signal analysis*. SIAM, Philadelphia, 1997.

[2] R.C. Geary. The ratio of the mean deviation to the standard deviation as a test of normality. *Biometrika*, 27:310–32, 1935.

[3] R.W. Hamming. *Digital filters*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1977.

[4] E.T. Jaynes. *Probability theory: the logic of science*. Cambridge University Press, 2003.

[5] R.K. Pearson en M. Gabbouj. *Nonlinear digital filtering with Python*. CRC Press, 2015.

[6] C.H. Rohwer. *Nonlinear smoothing and multiresolution analysis*. Birkhäuser, 2005.

[7] C.H. Rohwer. The estimation of moments of an unknown distribution in the discrete pulse transform. *Num. Alg.*, 45:239–51, 2007.

[8] C.H. Rohwer en D.P. Laurie. The discrete pulse transform. *SIAM J. Math. Anal.*, 38:1012–1034, 2004.