Graad 12: Rye en Reekse

Opgestel vir LitNet deur Jeanne-Mari du Plessis

In hierdie inligtingstuk gaan ons kyk na:

1. Rekenkundige rye
2. Meetkundige rye
3. Rekenkundige reekse
4. Meetkundige reekse
5. Sigma-notasie

---

1. Rekenkundige rye

1.1. Wat is ’n rekenkundige ry?

’n Rekenkundige ry is ’n geordende lys getalle waar die verskil tussen enige twee opeenvolgende getalle dieselfde is. Met ander woorde, die verskil tussen twee getalle bly konstant deur die hele lys getalle.

In ’n ry word die getalle TERME genoem. Die termnommer verwys na die posisie van die getal in die ry. T_1 verwys na die eerste term (getal) in die ry. T_{50} verwys na die vyftigste term in die ry. T_n verwys na enige term in die ry, omdat n ’n veranderlike is wat enige nommer kan voorstel.

VOORBEELD 1

2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 20…

- In die bostaande rekenkundige ry is die konstante verskil tussen die terme 3. Dit beteken jy tel 3 by een term om die volgende term te kry.
- $T_1 = 2$. Met ander woorde, die term in die eerste posisie van die ry het die getalwaarde 2.
- T_n verwys na enige van die terme in hierdie ry. As n=7, dan kyk ons na die term in die sewende posisie en sien dat $T_7=20$.
- Alhoewel daar net 7 terme hier bo gegee word, dui die drie kolletjies vir ons aan dat die ry wel aangaan. Daarom kan in die geval van T_n, n=9 en kan mens dan die waarde van T_9 bereken. **Wat sou die waarde van negende term van hierdie ry wees?**

VOORBEELD 2

4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4…

- Die konstante verskil tussen terme kan ook 0 (nul) wees.
- **Wat dink jy sou ons kon sê oor die waarde van T_n in so ’n ry**?
- Onthou, al is die waarde van elke term in die ry dieselfde, is daar nog steeds ’n oneindige aantal terme.

VOORBEELD 3

12 ; 8 ; 4 ; 0 ; -4 ; -8…

- ’n Rekenkundige ry kan ook dalend wees. Dit beteken net dat die konstante verskil tussen terme ’n negatiewe getal is. In dié geval is die konstante verskil -4.

VOORBEELD 4

$$\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{3}{3} ; \frac{4}{3} ; \frac{5}{3} ; \frac{6}{3}$$

- Beide die term en die konstante verskil kan ook as breuke voorkom. Wat is die konstante verskil in dié geval?
- In dié geval kan dit ook so wees dat ons T_3 kon skryf as 1 in plaas van $\frac{3}{3}$; of ons kon T_5 skryf as $1\frac{2}{3}$ in plaas van $\frac{5}{3}$. Dit maak nie saak hoe ons dit skryf nie, want dit beteken dieselfde. Soms help dit ons om te dink oor hoe ons die getalle moet skryf sodat die patroon wat gevorm word, die maklikste sigbaar is.

Probeer nou om self verskillende rekenkundige rye te maak!

1.2 Die algemene formule vir ’n rekenkundige ry

Kom ons kyk weer na die volgende patroon:

2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 20…

In die laerskool sou jy tipies gevra word om die volgende drie getalle (terme) in die ry te gee. In gr 8 en 9 word daar van jou verwag om die reël te beskryf en dan ’n sekere term te vind.

Nou gaan ons kyk na hoe om die n^{de} term te vind van so ’n ry. Die n^{ste} term van ’n ry kan gevind word deur die volgende formule te gebruik:

$T_n = a + (n-1)(d)$

- T_n verwys na die **n^{de}** term
- a verwys na die **eerste** term in die ry
- n verwys na die **termnommer**
- d verwys na die **konstante verskil**.

As ons nou die n^{de} term van die ry wat bo gegee is, wil bereken, dan sien ons die volgende:

- a is 2, want die eerste term in die ry het ’n getalwaarde van 2
- d is 3, want daar word elke keer 3 by ’n term getel om die volgende term te kry,

$T_n = a + (n-1)(d)$

Ons stel a=2 en d=3 in die formule in:

$T_n = 2 + (n-1)(3)$

Dan vereenvoudig ons die regterkant van die vergelyking deur te vermenigvuldig:

$T_n = 2 + 3n - 3$

Dan vereenvoudig ons verder deur gelyksoortige en ongelyksoortige terme bymekaar te tel:

$T_n = 3n-1$

Dit gee dan vir ons die n^{de} term ASOOK die rekenplan om ENIGE term in die ry uit te werk.

Byvoorbeeld:

Jy kan nou die 30^{ste} term in die ry uitwerk deur die termnommer (n) te vervang met 30

$T_{30} = 3(30)-1$

$T_{30} = 89$

1.3 Watter tipe vrae kan gevra word?

Jy kan gevra word om die volgende te bereken:

a) Die n^{de} term in 'n ry
b) 'n Sekere term in 'n ry
c) 'n Spesifieke termnommer

Kom ons kyk na hoe om hierdie vrae te beantwoord:

Beskou die ry:

-14 ; -6 ; 2 ; 10 ; 18…

a) Die eerste term is -14 en die konstante verskil is 8, want ons tel elke keer 8 by.
   $T_n = a + (n-1)(d)$

   $T_n = -14 + (n-1)(8)$

   $T_n = -14 + 8n - 8$

   $T_n = 8n - 22$

b) Bepaal die 25^{ste} term in die ry.
   $T_n = 8n-22$

   In dié geval maak ons n=25, omdat n die termnommer voorstel.

   $T_{25} = 8\,(25) - 22$

   $T_{25} = 178$

c) Watter term het ’n waarde van 114?
Hier word van jou verwag om die termnommer te bepaal deur die formule en die getalwaarde van die term te gebruik. Met ander woorde, ek wil weet wat n is.

$T_n = 8n-22$

Ons weet die getalwaarde is 114. Met ander woorde $T_n=114$. Dus kan ek T_n vervang met 114, omdat hulle gelyk is.

$114 = 8n-22$

En nou los ons algebraïes op vir n, wat vir ons die termnommer sal gee.

$114 + 22 = 8n$
$136 = 8n$
$136 \div 8 = n$
$17 = n$

Onthou, omdat die termnommer vir ons aandui in watter posisie (die hoeveelste term) ’n getal is in ’n ry, moet die termnommer dan ook altyd ’n heelgetal wees. Mens kry nie byvoorbeeld ’n term in die $3\frac{1}{2}^{\text{ste}}$ posisie nie.

Die vrae kan op verskillende maniere gevra word. Onthou net, as ons net die algemene formule kan kry, kan ons enige van die bostaande vrae beantwoord deur gebruik te maak van die formule.

---

2. Meetkundige rye

2.1. Wat is ’n meetkundige ry?

’n Meetkundige ry is ’n geordende lys getalle waar die verhouding tussen enige twee opeenvolgende getalle dieselfde is. Met ander woorde, die verhouding tussen twee getalle bly konstant deur die hele lys getalle. Die verskil tussen meetkundige rye en rekenkundige rye kan beskryf word deur te sê dat waar ons in rekenkundige rye iets by ’n term tel om die volgende term te kry, ons in meetkundige rye die eerste term met ’n faktor vermenigvuldig om die volgende term te bereken.

VOORBEELD 1

2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128…

- In die bostaande rekenkundige ry is die konstante verhouding tussen die terme 2. Dit beteken dat jy 'n term vermenigvuldig met twee om die volgende term in die ry te bereken.
- $T_1 = 2$. Met ander woorde, die term in die eerste posisie van die ry het die getalwaarde 2.
- T_n verwys na enige van die terme in hierdie ry. As n=7 dan kyk ons na die term in die sewende posisie en sien dat $T_7=128$.
- Alhoewel daar net 7 terme hier bo gegee word, dui die drie kolletjies vir ons aan dat die ry wel aangaan. Daarom kan in die geval van T_n, n=9 en mens kan dan die waarde van T_9 bereken. **Wat sou die waarde van negende term van hierdie ry wees?**

VOORBEELD 2

4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4…

- Die konstante verhouding van die ry is 1, omdat ons elke keer die term met 1 vermenigvuldig om die volgende term te bereken.
- **Wat dink jy sou ons kon sê oor die waarde van T_n in so 'n ry**?
- Onthou, al is die waarde van elke term in die ry dieselfde, is daar nog steeds 'n oneindige aantal terme.

VOORBEELD 3

36 ; 12 ; 4 ; $\frac{4}{3}$; $\frac{4}{6}$; $\frac{4}{9}$…

- 'n Meetkundige ry kan ook dalend wees. Dit beteken net dat die konstante verhouding tussen terme 'n breukgetal is. In dié geval is die konstante verhouding $\frac{1}{3}$. Mens kan daarna kyk en sê mens deel elke term deur drie om die volgende term te kry, maar dit sou meer korrek wees om te sê jy vermenigvuldig elke term met $\frac{1}{3}$.
- As die konstante verhouding tussen terme tussen 0 en 1 lê (met ander woorde, 'n breuk is), dan sê ons die ry **KONVERGEER**. Dit beteken dat die getalle in die ry al nader aan 0 neig. Hier bo kan jy sien dat die terme al hoe kleiner en kleiner word. $\frac{4}{3}$ = 1,33333 en $\frac{4}{6}$ = 0.666666 en $\frac{4}{9}$ = 0,444444. Met elke term is die breuk kleiner en kleiner. Die breuk sal eventueel so klein wees dat dit net sowel as nul gesien kan word.

VOORBEELD 4

7 ; -14 ; 28 ; -56 ; 112 ; -224…

- Die konstante verhouding van 'n meetkundige ry kan ook negatief wees. 7 x -2 is -14, wat 'n negatiewe getal is. -14 x -2 is 28, wat dan positief is.

Probeer nou om self verskillende meetkundige rye te maak!

2.2 Die algemene formule vir 'n meetkundige ry

Kom ons kyk weer na die volgende patroon:

2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128…

Die algemene formule vir 'n meetkundige ry is:

$\mathbf{T_n = ar^{n-1}}$

- T_n verwys na die **n**$^{\mathbf{de}}$ term
- a verwys na die **eerste** term in die ry
- r verwys na die konstante **verhouding**
- n verwys na die **termnommer**.

As ons nou die n^{de} term van die ry wat bo gegee is wil bereken, dan sien ons die volgende:

- a is 2, want die eerste term in die ry het 'n getalwaarde van 2
- r is 2, want ons vermenigvuldig elke term met 2 om die volgende term te kry.

$T_n = ar^{n-1}$

Ons stel a=2 en r=2 in die formule in:

$T_n = (2)(2)^{n-1}$

Onthou, die eksponent van n-1 is die eksponent van r, en dat r vermenigvuldig word met a. Dus is r en a twee verskillende getalle.

Dit gee dan vir ons die n^{ste} term ASOOK die rekenplan om ENIGE term in die ry uit te werk.

Byvoorbeeld:

Jy kan nou die 30ste term in die ry uitwerk deur die termnommer (n) te vervang met 30:

$T_{30} = (2)(30)^1$

$T_{30} = 60$

2.3 Watter tipe vrae kan gevra word?

Jy kan gevra word om die volgende te bereken:

a) Die n^{de} term in ’n ry
b) ’n Sekere term in ’n ry
c) Bepaal die eerste term van ’n ry.

Kom ons kyk na hoe om hierdie vrae te beantwoord:

Beskou die ry:

7 ; -14 ; 28 ; -56 ; 112 ; -224…

a) Die eerste term is 7 en die konstante verskil is -2, want ons vermenigvuldig elke keer met -2.
$T_n = (7)(-2)^{n-1}$
b) Bepaal die 25^{ste} term in die ry.
$T_n = (7)(-2)^{n-1}$
In dié geval maak ons n=25, omdat n die termnommer voorstel.
$T_{25} = (7)(-2)^{25-1}$

$T_{25} = (7)(-2)^{24}$

$T_{25} = 117440512$
c) Bepaal die eerste term van ’n ry met ’n konstante verhouding van $\frac{1}{4}$ en ’n 8^{ste} term van 65536
$T_n = ar^{n-1}$
Hier wil ons A bereken. Ons weet $T_8 = 65536$, dus kan ons n vervang met 8. Ons weet ook r = $\frac{1}{4}$. Dan los ons algebraïes op vir a.
$T_8 = (a)(\frac{1}{4})^{8-1}$
$65536 = (a)(\frac{1}{4})^7$
$65536 = (a)\frac{1}{16384}$
$65536 \times 16384 = a$
$1073741824 = a$

Die vrae kan op verskillende maniere gevra word. Onthou net, as ons net die algemene formule kan kry, kan ons enige van die bostaande vrae beantwoord deur gebruik te maak van die formule.

3. Rekenkundige reekse

3.1. Wat is ’n rekenkundige reeks?

’n Rekenkundige reeks is die som van ’n sekere aantal terme in ’n rekenkundige ry.

VOORBEELD 1

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + … + 100

Vat die rekenkundige reeks van 1 tot 100, wat sê ons wil die som van 1 tot 100 bereken.

As ons die eerste term (1) en die laaste term (100) bymekaar tel, dan kry ons 101. As ons die tweede term in die reeks (2) en die tweede laaste term (99) in die reeks bymekaar tel, dan kry ons ook 101. As ons die derde term (3) en die derde laaste term (98) bymekaar tel, kry ons dan ook weer 101. As ons so aanhou, sal ons 50 pare kan maak wat tot 101 optel.

Dus kan ons die som van 1 tot 100 bereken deur te sê 50 x 101 = 5050.

Vanuit die bostaande is die algemene formule vir ’n rekenkundige reeks ontwikkel:

$\mathbf{S_n = \frac{n}{2}(a + l)}$

- S_n verwys na die waarde van die **som** van al die terme.
- n verwys na die **aantal terme** in die reeks (hoeveel terme ons bymekaartel) wat ons verdeel in pare (deur die eerste en laaste getalle bymekaar te sit).
- a verwys na die **eerste term** in die ry.
- l verwys na die **laaste term** in die ry.

VOORBEELD 2

Beskou die reeks en bereken die som:

6 + 12 + 18 + 24 + 30 + 36

Daar is 6 terme in die ry: die eerste term is 6 en die laaste term is 36, dus:

$S_6 = \frac{6}{2}(6 + 36)$

$S_6 = 126$

Die som van die reeks is 126.

VOORBEELD 3

Soms word ons ’n reeks gegee waar die laaste term van die reeks nie noodwendig duidelik is nie. Gelukkig het ons uit rekenkundige rye ’n manier om die laaste term te bereken.

Beskou die volgende reeks en bereken die som tot 20 terme:

10 + 4 + (-2) + (-8) + (-14) + (-20)…

Ons moet eers bereken wat die 20ste term in so reeks sal wees en ons kan die formule $T_n = a + (n-1)(d)$ gebruik.

$T_{20} = 10 + (20-1)(-6)$

$T_{20} = 10 + (19)(-6)$

$T_{20} = 10 + (19)(-6)$

$T_{20} = 10 – 114$

$T_{20} = -104$.

En nou kan ons die som van die eerste twee terme bereken:

$S_{20} = \frac{20}{2}(10-104)$

$S_{20} = -940$

Om tyd te bespaar kan jy ook die formule vir die som van ’n rekenkundige reeks manipuleer deur die simbool vir die laaste term te vervang met die formule om die waarde van ’n term te bereken en dan te vereenvoudig.

$S_n = \frac{n}{2}(a + \underline{\underline{l}})$

$S_n = \frac{n}{2}[a + \underline{\underline{a + (n-1)(d)}}]$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)(d)]$

Dan:

$S_{20} = \frac{20}{2}[2(10) + (20-1)(-6)]$

$S_{20} = 10[20 - 114]$

$S_{20} = -940$.

Jy kan ook gevra word om te bereken hoeveel terme in ’n reeks is as jy die waarde van die som ken.

VOORBEELD 4

Hoeveel terme in die volgende reeks sal ’n som van 45 lewer?

1 + 1,5 + 2 + 2,5 + ...

Jy kan dus nou die formule gebruik om algebraïes op te los vir die termnommer (n). Stel die somwaarde (S_n = 45), die eerste term (a = 1) en die konstante verskil (d=0,5) in die formule:

$S_n = \frac{n}{2}[2a +(n-1)(d)]$

$45 = \frac{n}{2}[2(1) +(n-1)(0,5)]$

$45 = \frac{n}{2}[2 + 0,5n – 0,5]$

$90 = n[1,5 +0,5n]$

$90 = 1,5n +0,5n^2$.

Hier het ons ’n drieterm wat ons gaan moet faktoriseer. Dit beteken ons gaan twee moontlike oplossings kry. Maar omdat n ’n termnommer voorstel, ’n posisie in die reeks, sal daar een toepaslike antwoord wees.

$0 = 0,5n^2 +1.5n -90$

Jy kan met twee vermenigvuldig sodat jy nie met desimale breuke hoef te werk nie.

$0 = n^2 + 3n -180$

$0 = (n – 12)(n + 15)$

$n -12 = 0$ of $n + 15 = 0$

$n = 12$ of $n = -15$

Maar omdat n na ’n posisie of termnommer verwys, MOET n ’n positiewe getal wees, omdat ’n getal nie in die -15de posisie in die ry/reeks kan wees nie (die eerste posisie is 1, wat positief is).

Dus is n = 12, wat beteken dat 12 terme in die reeks ’n som van 45 sal lewer.

4. Meetkundige reekse

’n Meetkundige reeks is die som van ’n sekere aantal terme in ’n meetkundige ry. Om die som van ’n meetkundige reeks te bereken kan jy die volgende formule gebruik:

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

- S_n verwys na die waarde van die **som** van al die terme.
- n verwys na die **aantal terme** in die reeks.
- a verwys na die **eerste term** in die reeks.
- r verwys na die **konstante verhouding** tussen die terme.
- Dit is belangrik om te besef dat $r \neq 1$, omdat dit die noemer in die formule 0 sal maak en die som dan ongedefinieer sal wees.

VOORBEELD 1

Beskou die volgende meetkundige reeks en bereken die som tot 8 terme

1 + 3 + 9 + 27 + …

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

In dié geval is n=8 (8 terme word gevra), a=1 en r=3

$S_8 = \frac{1(3^8-1)}{3-1}$

$S_8 = \frac{1(6560)}{2}$

$S_8 = 3280$

Jy kan ook gevra word om die eerste term in ’n reeks te bereken as die konstante verhouding en die som van die reeks gegee is.

VOORBEELD 2

Die som van die eerste vier terme in ’n meetkundige reeks is 10 en die konstante verhouding is $\frac{1}{3}$. Bereken die eerste term.

Ons kan die formule gebruik om op te los vir a (die eerste term). In dié geval is S_4=10 , n=4 en r=$\frac{1}{3}$.

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$10 = \frac{a(\frac{1}{3}^4-1)}{\frac{1}{3}-1}$

$10 = \frac{a(\frac{1}{81}-1)}{-\frac{2}{3}}$

$\frac{-20}{3} = a(-\frac{80}{81})$

$\frac{-20}{3} \div \frac{-80}{81} = a$

$\frac{27}{4} = a$

Die eerste term in die ry is $\frac{27}{4}$.

Mens kan ook die som vir oneindige meetkundige reekse bereken. Soos vroeër bespreek, as die konstante verhouding (r) tussen 0 en 1 lê (0 > r > 1), dan konvergeer die reeks. Dit beteken dat die getalwaardes van die terme al hoe nader en nader aan 0 neig, maar nooit 0 bereik nie. As ons aanvaar dat daar ’n punt sal kom dat die getalwaarde van die terme so klein sal wes, so na aan 0 sal wees dat ons dit net so wel as 0 kan beskou, dan kan ons die som tot oneindig bereken. Dit is omdat die getalwaardes so na aan 0 is dat dit omtrent nie ’n verskil aan die som gaan maak nie.

As ons die som tot oneindig bereken, maak ons gebruik van die volgende formule:

S∞ = $\mathbf{\frac{a}{1-r}}$

- S∞ verwys na ’n **oneindige aantal terme**.
- a verwys na die **eerste term.**
- r verwys na die **konstante verhouding.** Om die som vir ’n oneindige aantal terme te bereken, moet 0 < r < 1, want die reeks moet konvergeer (al hoe nader aan 0 beweeg).

VOORBEELD 3

Beskou die volgende reeks, en bereken die som vir ’n oneindige aantal terme.

$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots$

S∞ = $\frac{a}{1-r}$

In dié geval is die eerste term (a) $\frac{3}{10}$, en die konstante verhouding (r) $\frac{1}{10}$.

S∞ = $\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}$

S∞ = $\frac{1}{3}$

---

5. Sigma-notasie

In wiskunde maak ons gebruik van simbole om stellings te maak of vrae te vra in "wiskundetaal". Ons kan sigma-notasie gebruik om oor rekenkundige of meetkundige reekse te praat.

$$\sum$$

Hierdie simbool is sigma ('n letter in die Griekse alfabet). In wiskundetaal beteken die simbool "die som van".

Wat jy tipies in jou handboeke en in toetse sal sien, is so iets:

$$\sum_{n=1}^{8}(n+2)$$

- In hierdie notasie beteken dit: Bereken die som van 'n reeks wat gevorm word deur die reël n+2, van die eerste 8 terme en begin tel by die eerste term.
- (n+2) beskryf die **reël** wat gebruik word om die reeks te vorm.
- Die 8 bo-op die sigma verwys na die **aantal terme** wat in die reeks is. Met ander woorde, hoeveel terme bymekaar getel moet word.
- n=1 verwys na die **termnommer waar jy moet begin tel**.

In dié geval kan **ons die eerste en die laaste term** van die reeks bereken en die formule vir die som van 'n rekenkundige reeks gebruik om die som te bereken (omdat daar 'n konstante verskil is en nie 'n konstante verhouding nie).

T_1= 1 + 2 = 3

T_8= 8 + 2 = 10

$S_n = \frac{n}{2}(a + l)$

$S_8 = \frac{8}{2}(3 + 10)$

$S_8 = 4(13)$

$S_8 = 52$.

Sigma-notasie kan ook gebruik word vir meetkundige reekse, kwadratiese reekse en oneindige reekse, byvoorbeeld:

$$\sum_{n=3}^{15}(11(2)^{n-1})$$

In hierdie geval word jy gevra om die som van die eerste 15 terme van 'n meetkundige reeks te bereken, maar jy moet met die derde term begin in plaas van die eerste term.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{5})^{n-1}$$

In hierdie geval word jy gevra om die som tot oneindig van ’n meetkundige reeks te bereken, maar jy moet met die eerste term begin.

$$\sum_{n=5}^{25}(2n^2+n-5)$$

In hierdie geval word jy gevra om die som van 15 terme van ’n kwadratiese ry te bereken, maar jy moet met die vyfde term begin.